

Notas de Aula de Física

21. ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA.....	2
PROCESSOS REVERSÍVEIS E IRREVERSÍVEIS	2
MÁQUINAS TÉRMICAS.....	4
<i>Uma máquina de Carnot.....</i>	4
<i>Eficiência de uma máquina de Carnot.....</i>	6
REFRIGERADORES.....	6
TEOREMA DE CLAUSIUS	7
A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA	9
<i>Enunciado de Kelvin</i>	9
<i>Consequências do enunciado de Kelvin</i>	9
<i>Enunciado de Clausius</i>	9
VARIAÇÃO DA ENTROPIA - CASOS PARTICULARES.....	9
<i>Transformação adiabática reversível</i>	9
<i>Variação da entropia em uma transição de fase.....</i>	9
<i>Variação de entropia de um gás ideal</i>	10
PROBABILIDADE E ENTROPIA	10
UMA VISÃO ESTATÍSTICA DA ENTROPIA	13
CALOR, TRABALHO E ENERGIA	13
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS.....	14
01	14
06	14
07	16
09	16
11	17
18	19
19	21
23	22
27	22
29	23
30	24
32	25
33	26
35	27
37	28
41	28
44	29

21. Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica

Processos reversíveis e irreversíveis

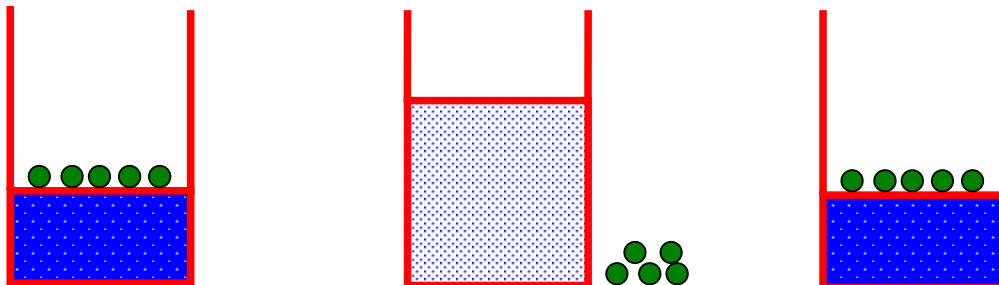
Segundo o Dicionário Aurélio, que reflete o nosso linguajar coloquial, algo é reversível quando se pode reverter; ou que pode retornar ao estado inicial. Em Física, um processo é reversível quando pode parti do estado final e alcançar o estado inicial usando os mesmos micro-estados que utilizou para alcançar o estado final.

Consideremos um sistema em equilíbrio, e apenas nessas circunstâncias podemos caracterizar um estado termodinâmico e, nesse estado podemos atribuir valores para as funções termodinâmicas de estado tais como temperatura, pressão, energia interna, e etc. Quando um sistema sofre variações através de absorção de calor ou trabalho, ele sai momentaneamente do estado de equilíbrio, e depois de um certo tempo de relaxação encontra outro estado de equilíbrio.

Quando a variação sofrida pelo sistema for infinitesimal, as suas funções termodinâmicas também sofrerão variações infinitesimais. E podemos caracterizar os novos valores das funções termodinâmicas para essa nova situação de equilíbrio. Essas transformações infinitesimais são chamadas às vezes de transformações quasi-estáticas. Quando submetemos um sistema a várias transformações quasi-estáticas, podemos definir uma sequência de valores pra as suas funções de estado, que irão caracterizar cada uma das pequenas transformações. Podemos desse modo executar a mudança de um sistema físico entre dois estados termodinâmicos afastados, utilizando uma sequência de pequenas transformações quasi-estáticas.

Um exemplo dessa situação seria considerar um gás em equilíbrio, contido em um êmbolo, que está mantido nessa posição por uma certa quantidade de pequenos pesos. À medida que retiramos um pequeno peso, a pressão exercida no êmbolo diminui infinitesimalmente, fazendo com que o gás encontre outra situação de equilíbrio, infinitesimalmente próxima da situação de equilíbrio anterior. Quando terminarmos de retirar os pesos, o gás encontra-se em um estado termodinâmico final distante do estado termodinâmico inicial. E o gás alcançou o estado final seguindo um percurso de estados intermediário que foram sendo conhecidos enquanto ele sofria as transformações infinitesimais.

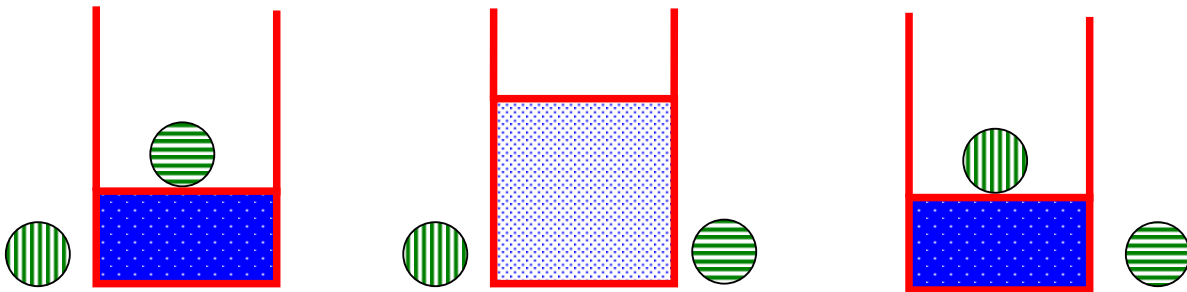
Se quisermos fazer o gás retornar ao estado inicial pelo mesmo percurso, será necessário apenas ir recolocando paulatinamente os pesos em seus lugares originais, e o sistema voltará usando os mesmos estados do percurso de ida.



Consideremos o mesmo sistema anterior, no mesmo estado inicial. A única diferença da configuração seria que os pequenos pesos forma substituídos por um único peso de mesma massa. Quando esse peso é retirado, o sistema sofre uma mudança brusca até atingir o equilíbrio. Durante esse processo, para as funções termodinâmicas de estado tais como temperatura, pressão, energia interna; ficam indefinidas, pois são caracterizadas apenas em situações de equilíbrio.

Como não estamos limitando as possibilidades de interação entre o gás e o ambiente, as quantidades de calor e trabalho envolvidas no percurso de volta podem ser diferentes das quantidades do percurso da vinda.

No percurso inicial, quando retiramos o peso, o gás enfrentou um processo de forte desequilíbrio no qual não é possível definir as funções termodinâmicas. Essa é a essência de um processo irreversível: a impossibilidade de definir os estados intermediários de uma transformação termodinâmica. Como não podemos conhecer o percurso utilizado, não podemos reverter o processo pelo mesmo caminho.



Existe uma outra faceta que caracteriza os processos irreversíveis. São que processos que naturalmente acontecem apenas em uma direção.

Na experiência cotidiana percebemos que o calor sempre vai naturalmente do corpo mais quente para o mais frio, até que as temperaturas se equilibrem. Mas nunca acontece o contrário: o calor naturalmente ir do corpo mais frio para corpo o mais, esquentando o mais quente e esfriando o mais frio. Essa frase anterior chega a incomodar do absurdo que ela reflete. Porque acontece isso se as duas transformações são equivalentes em termos energéticos: a energia seria conservada em ambas as situações.

As mudanças que acontecem com a energia dentro de um sistema fechado não impõem o sentido de processos irreversíveis. Essa direção é imposta pela análise da variação de uma outra grandeza termodinâmica: a entropia. A entropia está associada com o grau de organização de um sistema. E esse grau de organização não pode nunca diminuir naturalmente.

Quando um sistema esfria significa que diminuiu a sua energia interna e, portanto a amplitude de seus movimentos, o números de graus de liberdade. Isso implica em torná-lo mais organizado. Nessa situação, esfriar o sistema significaria diminuir a entropia, e por isso em um sistema isolado a temperatura nunca diminui.

Máquinas térmicas

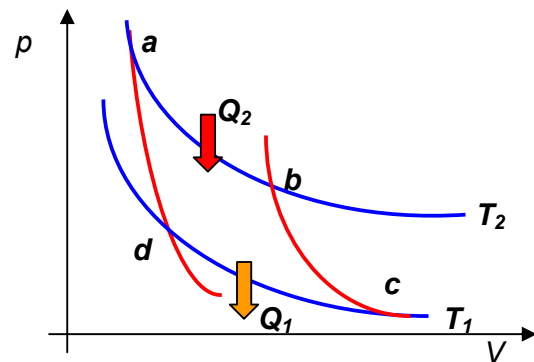
Máquina térmica ou motor é um dispositivo que extrai energia do ambiente, na forma de calor, e realiza trabalho útil. No interior de toda máquina térmica está uma substância de trabalho, que sofre as transformações termodinâmicas que possibilitam as mudanças de forma da energia.

Para que uma máquina funcione de maneira permanente é necessário que ela opere em ciclos, ou seja: a substância de trabalho passa por diversas transformações termodinâmicas até retornar ao estado inicial, completando um ciclo.

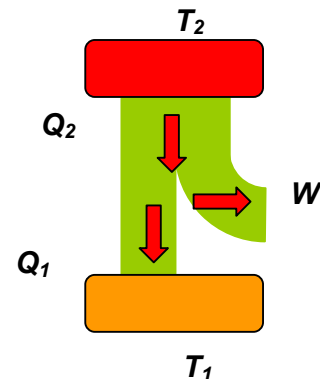
De modo geral as máquinas térmicas operam em ciclo entre duas fontes térmicas com temperaturas diferentes. Uma máquina térmica retira calor da fonte quente e rejeita parte desse calor para uma fonte fria e transforma essa diferença de energia em trabalho mecânico.

Uma máquina de Carnot

Em um ciclo de uma máquina de Carnot a substância de trabalho passa por quatro processos diferentes, onde dois processos são isotérmicos (**ab** e **cd**) e os outros dois processos são adiabáticos (**bc** e **da**).



O sistema absorve uma quantidade de calor Q_2 isotermicamente a uma temperatura T_2 quando vai do estado **a** para o estado **b**. E de maneira equivalente, o sistema rejeita uma quantidade de calor Q_1 isotermicamente a uma temperatura T_1 quando vai do estado **c** para o estado **d**. As transformações entre os estados **b** e **c**, bem como entre os estados **d** e **a** acontecem adiabaticamente, ou seja: sem que ocorra troca de calor com o ambiente.



O trabalho executado pelo sistema quando acontece a transformação isotérmica entre os estados **a** e **b** é calculado como:

$$W_{ab} = \int_a^b p dV$$

e considerando a substância de trabalho como um gás ideal, temos que:

$$p = \frac{\mu RT}{V}$$

ou seja:

$$W_{ab} = \mu RT_2 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = \mu RT_2 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

De maneira equivalente calculamos trabalho executado pelo sistema quando acontece a transformação isotérmica entre os estados **c** e **d** como sendo:

$$W_{cd} = \mu RT_1 \int_{V_c}^{V_d} \frac{dV}{V} = \mu RT_1 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)$$

Considerando que a substância de trabalho é um gás ideal, a sua energia interna depende explicitamente apenas da temperatura, e desse modo ela se mantém constante ao longo de uma transformação isotérmica. Ou seja:

$$\begin{cases} E(T_2) = E_a = E_b \\ E(T_1) = E_c = E_d \end{cases}$$

Tendo em conta a primeira lei da termodinâmica

$$dE = dQ - dW$$

encontramos que:

$$\begin{cases} \Delta E_{ab} = Q_{ab} - W_{ab} \Rightarrow Q_2 \equiv Q_{ab} = W_{ab} \\ \Delta E_{cd} = Q_{cd} - W_{cd} \Rightarrow Q_3 \equiv Q_{cd} = W_{cd} \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_{ab}}{W_{cd}} = \frac{\mu RT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)}{\mu RT_2 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)}$$

Ainda considerando as propriedades de um gás ideal, quando ele é submetido a uma transformação adiabática, temos que:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

ou seja:

$$\begin{cases} T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \\ T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_d^{\gamma-1} \end{cases}$$

logo:

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}} \Rightarrow \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right) = -\ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)$$

e finalmente

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_{cd}}{W_{ab}} = \frac{\mu RT_1 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)}{\mu RT_2 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} = -\frac{T_1}{T_2}$$

Eficiência de uma máquina de Carnot

A eficiência de uma máquina térmica qualquer é definida como a sua capacidade de transformar calor em trabalho. Ou seja:

$$\varepsilon = \frac{\text{trabalho efetivo}}{\text{calor absorvido}} = \frac{W_E}{Q_{\text{absorvido}}}$$

onde o trabalho efetivo é entendido como a soma de todos os trabalhos envolvidos em cada etapa do ciclo completo, e o calor absorvido é considerado como o soma de todos os calores absorvidos (positivos), ignorando-se os calores rejeitados (negativos).

Em um ciclo de Carnot, como esse considerado anteriormente:

$$W_E = W_{ab} + W_{cd} = |W_{ab}| - |W_{cd}|$$

onde enfatizamos que $W_{cd} < 0$. Por outro lado, o calor absorvido foi $Q_2 > 0$. E desse modo temos que:

$$\varepsilon = \frac{|W_{ab}| - |W_{cd}|}{Q_2} = \frac{|Q_2| - |Q_1|}{|Q_2|} = \frac{|W_{ab}| - |W_{cd}|}{W_{ab}} = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|}$$

ou seja:

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

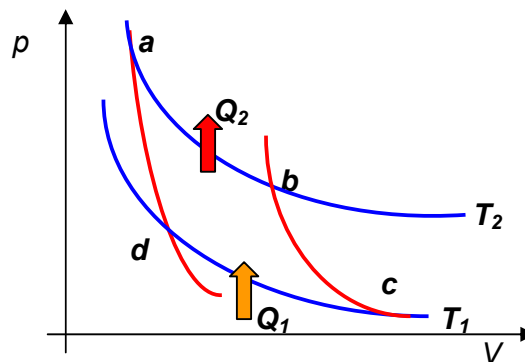
Refrigeradores

Refrigerador é um dispositivo cuja função é transferir calor de um reservatório térmico em uma temperatura mais baixa para um outro reservatório térmico em uma temperatura mais alta. Em um processo natural o calor se transfere de um reservatório com temperatura mais alta para outro com uma temperatura mais baixa. Para conseguir realizar uma transferência de calor num sentido contrário ao sentido natural, o refrigerador necessita executar trabalho na substância de trabalho.

A região onde são armazenados os alimentos no interior de uma geladeira doméstica é o reservatório frio, e o reservatório quente é o ambiente que rodeia a geladeira. Para um ar-condicionado o reservatório frio é o interior do aposento onde ele está instalado, e o reservatório quente é o ambiente externo a esse aposento.

De maneira semelhante a uma máquina térmica ideal, em um refrigerador ideal todos os processos são reversíveis.

Em um refrigerador de Carnot temos um ciclo passando pelos mesmos estados de uma máquina de Carnot, mas com uma seqüência de transformações em um sentido contrário, como mostra a figura ao lado.

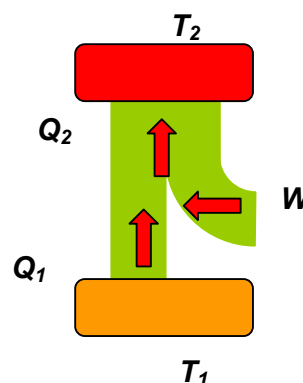


O equivalente à eficiência de uma máquina térmica é definido como coeficiente de desempenho de um refrigerador K :

$$K = \frac{\text{o que queremos}}{\text{o que pagamos}} = \frac{|Q_1|}{|Q_2| - |Q_1|}$$

Para um refrigerador de Carnot temos que:

$$K_C = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$



Teorema de Clausius

Quando estávamos analisando o ciclo de Carnot, encontramos que:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_{cd}}{W_{ab}} = \frac{\mu RT_1 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)}{\mu RT_2 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} = -\frac{T_1}{T_2}$$

Podemos então dizer que quando uma máquina térmica realiza um ciclo reversível usando duas transformações isotérmicas de temperaturas T_1 e T_2 e duas transformações adiabática que partem de uma isotérmica e alcança a outra, como foi indicado anteriormente, nós temos que:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Se tivermos um grande número de transformações reversíveis alternadamente isotérmicas e adiabáticas, como na situação anterior, de modo que esse sistema complete um ciclo, poderemos generalizar a equação anterior como:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

A generalização da equação anterior é conhecida como o teorema de Clausius.

Seja dQ a quantidade de calor que um dado sistema troca com o ambiente que o rodeia, e seja T a temperatura em que se dá essa troca de calor; segundo o teorema de Clausius nós temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \frac{dQ_R}{T} = 0; \text{ num ciclo reversível} \\ \oint_C \frac{dQ}{T} \leq 0; \text{ num ciclo irreversível} \end{array} \right.$$

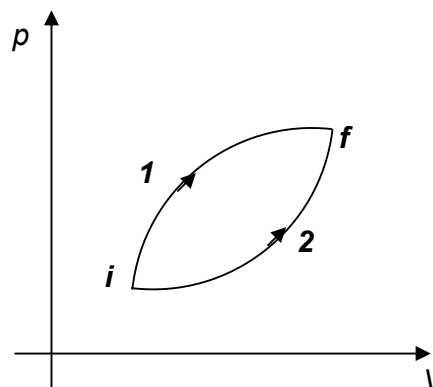
Como foi dito anteriormente, um processo reversível é composto de pequenos processos entre estados termodinâmicos muito próximos. Acontece uma pequena mudança no estado de equilíbrio de um sistema, e ele encontra um novo estado de equilíbrio próximo ao estado inicial.

Apesar da grandeza dQ_R/T de modo geral não ser uma função de estado, para um processo reversível ela comporta como uma função de estado, e podemos definir a entropia S como sendo essa grandeza, de tal modo que:

$$dS = \frac{dQ_R}{T}$$

Como a entropia é uma função de estado, a diferença entre os valores de da entropia de dois estados independe do caminho usado para se ir de um estado até o outro. Vamos considerar um processo reversível cíclico, partindo do estado i até o estado f pelo percurso 1 e voltando até o estado original pelo percurso 2 . Desse modo, temos que:

$$\oint_C \frac{dQ_R}{T} = \oint_C dS = 0$$



ou seja:

$$\int_{i(1)}^f dS + \int_{f(2)}^i dS = 0 \Rightarrow \int_{i(1)}^f dS = - \int_{f(2)}^i dS \quad \therefore \int_{i(1)}^f dS = \int_{i(2)}^f dS$$

Como os percursos 1 e 2 foram escolhidos genericamente, podemos concluir que num processo reversível a variação de entropia entre dois estados de equilíbrio não depende do percurso usado para ir de um estado até o outro.

A segunda lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica incorpora ao princípio geral da conservação da energia o reconhecimento de que calor é uma forma de energia. Qualquer processo cuja energia total seja conservada é compatível com a primeira lei da termodinâmica.

No entanto, existem processos que só acontecem em um sentido, são os processos irreversíveis. A segunda lei da termodinâmica dá conta desta questão, assim como das possíveis maneiras de transformar calor em trabalho.

Enunciado de Kelvin

É impossível realizar um processo cujo único efeito seja remover calor de um reservatório térmico e produzir uma quantidade equivalente de trabalho.

Consequências do enunciado de Kelvin

- A geração de calor por atrito a partir de trabalho mecânico é irreversível.
- A expansão livre de um gás é um processo irreversível.
- A condução de calor, que se dá sempre do corpo mais quente para o mais frio, é um processo irreversível.

Curso de Física Básica - Vol 2 - item 10.2 Moysés Nussenzveig

Enunciado de Clausius

É impossível realizar um processo cujo único efeito seja transferir calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.

Variação da entropia - casos particulares

Transformação adiabática reversível

Em uma transformação adiabática reversível o sistema não troca calor com o ambiente e, portanto:

$$dQ_R = 0 \Rightarrow dS = 0 \Rightarrow \Delta S = S_f - S_i = 0$$

Variação da entropia em uma transição de fase

Em uma transição de fase o sistema absorve (ou fornece) calor sem que exista uma variação de temperatura:

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ_R}{T}$$

e como a temperatura é constante

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_R}{T} = \frac{mL}{T}$$

onde m é a massa do sistema e L é o calor latente desse sistema nessa transição de fase.

Variação de entropia de um gás ideal

De acordo com a primeira lei da termodinâmica

$$dE = dQ - dW \Rightarrow TdS = dQ = dE + pdV$$

ou seja:

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{p}{T}dV$$

Considerando que para um gás ideal:

$$\begin{cases} dE = \mu C_v dT \\ \frac{p}{T} = \frac{\mu R}{V} \end{cases}$$

encontramos:

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \mu C_v \frac{dT}{T} + \int_i^f \mu R \frac{dV}{V}$$

Se considerarmos o calor específico constante na região de integração, teremos que:

$$\Delta S = S_f - S_i = \mu C_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

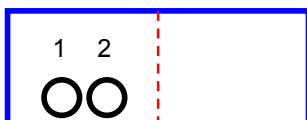
Probabilidade e entropia

Uma amostra de um gás comum contém um número muito grande de átomos ou moléculas. Para termos uma idéia da ordem de grandeza de quão grande é esse número basta lembrarmos que em um mol de hidrogênio (2 gramas) existem 10^{23} moléculas (número de Avogadro).

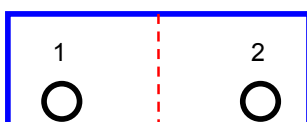
Para lidar uma grande quantidade de moléculas vamos introduzir conceitos de probabilidade e estatística, e para tal vamos analisar um gás composto por pouquíssimas partículas.

Consideremos um gás com apenas duas moléculas idênticas, que ocupam um recipiente dividido em duas partes; à parte da esquerda e a parte da direita.

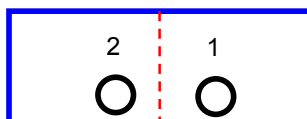
Quais as possíveis configurações que esse gás pode apresentar? Podemos ter as possibilidades mostradas adiante:



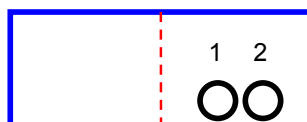
A As duas moléculas ocupam o lado esquerdo do recipiente.



B Uma molécula ocupa o lado esquerdo do recipiente enquanto a outra molécula ocupa o lado direito.



C As posições são invertidas, a molécula que na configuração anterior ocupava o lado esquerdo passa a ocupar o lado direito do recipiente, e a molécula que na configuração anterior ocupava o lado direito passa a ocupar o lado esquerdo do recipiente.



D As duas moléculas ocupam o lado direito do recipiente.

Mas afinal, esse gás de duas moléculas se apresentará em qual configuração? Essa situação se apresenta de uma forma nova, pois o gás pode se apresentar em qualquer uma das configurações. A pergunta deve ser feita de uma maneira diferente: qual a probabilidade do gás se apresentar em cada uma das configurações? Para responde a essa pergunta vamos construir uma tabela:

Configuração	Molécula 1	Molécula 2	n_E	n_D	Nº estados	Probabilidade
A	E	E	2	0	1	1/4
B	E	D	1	1	2	2/4 = 1/2
C	D	E	1	1		
D	D	D	0	2	1	1/4
Total					4	1

Nós temos dois estados equivalentes, e são aqueles associados com as configurações **B** e **C**. O total de estados acessíveis para as duas moléculas, nestas circunstâncias, é $2^N = 2^2 = 4$. Considerando que cada uma das configurações são igualmente prováveis, a probabilidade de encontrar o sistema em cada uma delas é $\frac{1}{4}$. Como temos duas configurações equivalentes (**B** e **C**), a probabilidade de encontrar sistema em uma delas é $2 \cdot (1/4) = \frac{1}{2}$. As duas configurações são equivalentes (**B** e **C**) por que são indistinguíveis, não se pode distinguir em qual das configurações o sistema está.

Para tentar entender o comportamento de um gás real, devemos analisar um gás com um número cada vez maior de moléculas. Nesse sentido, vamos refazer os cálculos anteriores considerando dessa vez um gás com 4 moléculas.

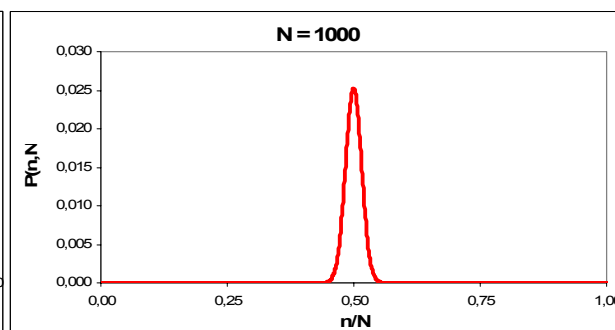
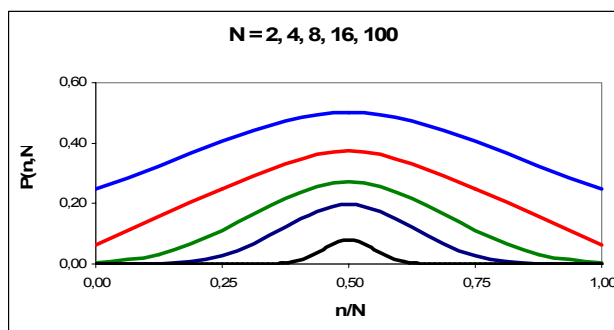
N = 4							
Molécula				n _E	n _D	Nº de estados	Probabilidade P(n _E , n _D)
1	2	3	4				
E	E	E	E	4	0	$1 = \binom{4}{0}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$
D	E	E	E	3	1	$4 = \binom{4}{1}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \binom{4}{1} \frac{1}{2^4}$
E	D	E	E				
E	E	D	E				
E	E	E	D				
D	D	E	E	2	2	$6 = \binom{4}{2}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = \binom{4}{2} \frac{1}{2^4}$
D	E	D	E				
D	D	E	D				
E	D	E	D				
E	D	D	D	1	3	$4 = \binom{4}{3}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \binom{4}{3} \frac{1}{2^4}$
D	D	E	D				
D	E	D	D				
E	D	D	D				
D	D	D	D	0	4	$1 = \binom{4}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$
Totais						$16 = 2^4$	1

Estamos usando a notação:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{N-n}$$

É possível generalizar os resultados obtidos para a situação onde o sistema é composto por um número N de moléculas. As probabilidades calculadas para cada uma das situações têm a forma:

$$P(n_E, n_D) = \binom{N}{n_E} \frac{1}{2^N}$$



Como mostra a figura anterior na medida que aumenta o número N de moléculas do gás o máximo em torno de $n_E = n_D$ vai se tornando cada vez mais agudo. Podemos entender que quando N for pequeno, não são muito diferentes as probabilidades do sistema ocupar um de seus estados acessíveis. No entanto, quando N assume valores apreciáveis, existe uma grande quantidade de estados equivalentes em torno de $n_E = n_D$ e desse modo existe uma grande probabilidade do sistema ocupar um estado onde $n_E = n_D$ onde o número de moléculas na parte esquerda do recipiente é igual ao número de moléculas na parte direita do recipiente.

Curso de Física Básica - Vol 2 - item 12.5
Moysés Nussenzveig

Uma visão estatística da entropia

No item anterior encontramos que o número de estados acessíveis $W(N, n_E)$ para uma dada escolha de n_E , ou seja, a multiplicidade de estados com essa mesma característica é dado por

$$W(N, n_E) = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{N-n}$$

O Físico austríaco Ludwig Boltzmann deduziu uma relação entre a entropia S de um sistema e a multiplicidade $W(N, n_E)$, e essa relação tem a forma:

$$S = k_B \ln W$$

Calor, trabalho e energia

Calor é a energia que se transfere de um corpo para o outro corpo devido a uma diferença de temperatura entre eles.

Trabalho é a energia que se transfere de um corpo para o outro devido a uma força que age entre eles.

Solução de alguns problemas

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

01 Uma amostra de 2,5 moles de um gás ideal se expande reversível e isotermicamente a 360K até que o seu volume seja dobrado. Qual o aumento de entropia do gás?

$$\mu = 2,5 \text{ moles}$$

$$T = 360 \text{ K}$$

$$V_f = 2 V_i$$

Para um gás ideal a energia interna é função apenas da temperatura, e desse modo em uma transformação isotérmica a energia interna não varia. Considerando a primeira lei da termodinâmica, para uma transformação isotérmica ($dE = 0$), temos que:

$$dE = dQ - dW \Rightarrow dQ = dW = p dV$$

Por outro lado:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dW}{T} = \frac{pdV}{T} = \mu R \frac{dV}{V}$$

onde a última igualdade é uma consequência da equação de estado para um gás ideal. Integrando a equação anterior, temos que:

$$\Delta S = S_f - S_i = \mu R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \mu R \ln 2$$

$$\Delta S = 14,41 \text{ J/K}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

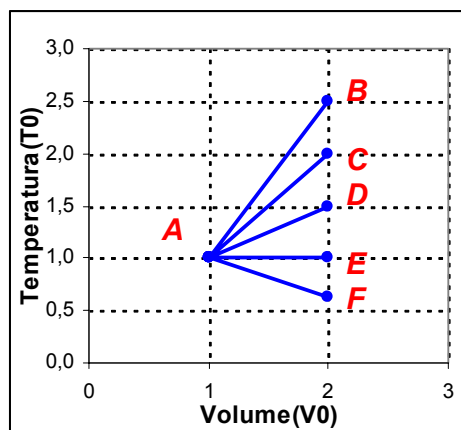
06 Um gás ideal monoatômico à temperatura inicial T_0 (em Kelvins) se expande do volume inicial V_0 até o volume final $2V_0$, por cada um dos processos indicados na figura ao lado. No processo **AF** a temperatura final é de $0,63T_0$.

Em que processo a expansão é:

- a) isotérmica
- b) Isobárica (pressão constante)
- c) adiabática

Explique as suas respostas.

- d) Em quais dos processos a entropia do gás diminui?



- a) Numa expansão isotérmica de um gás temos que, obviamente, a temperatura permanece constante e, portanto isso acontece no processo **AE** .
- b) Numa expansão isobárica de um gás ideal temos que:

$$\frac{V_i}{T_i} = \frac{\mu R}{p} = \frac{V_f}{T_f} \quad \therefore T_f = T_i \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 2T_i$$

e, portanto isso acontece na expansão **AC** .

- c) Numa expansão adiabática de um gás ideal temos que:

$$pV^\gamma = const \quad \Rightarrow \quad TV^{\gamma-1} = const$$

Para um gás ideal monoatômico:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5R}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3} \quad \therefore \gamma - 1 = \frac{2}{3}$$

e desse modo:

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \quad \therefore T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_i}{2^{2/3}} = 0,629T_i$$

e, portanto isso acontece na expansão **AF** .

- d) Numa **expansão isotérmica** desse tipo, como mostrado no problema 06, a entropia varia da forma:

$$\Delta S = S_f - S_i = \mu R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \mu R \ln 2 > 0$$

Numa **expansão adiabática** $dQ = 0$ e desse modo $\Delta S = 0$

Numa variação genérica em um gás ideal temos que:

$$dQ = dE + p dV = \mu C_V dT + p dV$$

ou seja:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \mu C_V dT + \frac{p}{T} dV = \mu C_V dT + \mu R \frac{dV}{V}$$

e, portanto

$$\Delta S = \mu C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Numa **expansão isobárica** desse tipo

$$\Delta S = (\mu C_V + \mu R) \ln 2 > 0$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 07 a) Qual a variação de entropia de um cubo de gelo de 12,0g que se derrete completamente em um balde de água cuja temperatura está logo acima do ponto de congelamento da água?

$$m = 12,0g = 0,012kg$$

$$T = 0^{\circ}C = 273K$$

$$L_F = 79,5\text{cam/g} = 333 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mL_F}{T} = 14,63 \text{ J/K}$$

- b) Qual a variação de entropia de uma colherada de 5,0g de água que evapora completamente em cima de um prato quente cuja temperatura está ligeiramente acima do ponto de ebulição da água?

$$m = 5,0g = 0,005kg$$

$$T = 100^{\circ}C = 373K$$

$$L_V = 539\text{cam/g} = 2.256 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mL_V}{T} = 30,24 \text{ J/K}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 09 Em um experimento, 200g de alumínio (com calor específico de 900J/kg.K) a 100°C são misturados com 50,0g de água a 20,0°C, com a mistura termicamente isolada.

- a) Qual a temperatura de equilíbrio?

$$m_a = 200g = 0,2kg$$

$$c_a = 900\text{J/kg.K}$$

$$T_a = 100^{\circ}C = 373K$$

$$m_A = 50g = 0,05kg$$

$$c_A = 1\text{cal/g}^{\circ}C = 4.190\text{J/kg.K}$$

$$T_A = 20^{\circ}C = 293K$$

Como o sistema composto por alumínio e água está isolado, ele não troca calor com a vizinhança, e desse modo:

$$\Delta Q = \Delta Q_a + \Delta Q_A = 0$$

e desse modo alcançam uma temperatura de equilíbrio T :

$$m_a c_a (T - T_a) + m_A c_A (T - T_A) = 0$$

ou seja:

$$T = \frac{m_a c_a T_a + m_A c_A T_A}{m_a c_a + m_A c_A} = 56,97^{\circ}C = 329,97K$$

b) Qual a variação de entropia do alumínio?

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{mcdT}{T} \quad \therefore \quad \Delta S = S_f - S_i = mc \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

ou seja:

$$\Delta S_a = m_a c_a \ln\left(\frac{T}{T_a}\right) = -22,07 J/K$$

c) Qual a variação de entropia da água?

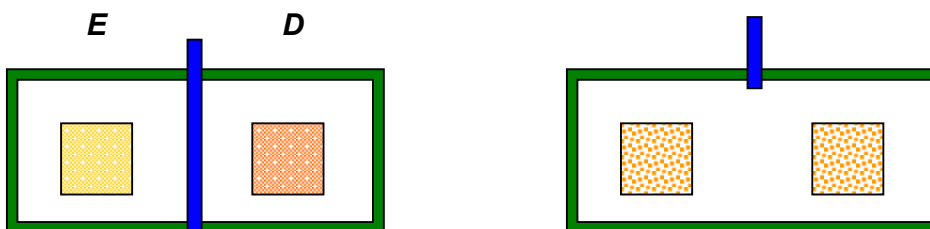
$$\Delta S_A = m_A c_A \ln\left(\frac{T}{T_A}\right) = +24,86 J/K$$

d) Qual a variação de entropia do sistema água - alumínio?

$$\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_A \quad \Rightarrow \quad \Delta S = +2,79 J/K$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

11 A figura abaixo mostra dois blocos idênticos de massa $m = 1,5\text{kg}$. O bloco E da esquerda está a uma temperatura $T_{IE} = 60^\circ\text{C}$ e o bloco D da direita está a uma temperatura $T_{ID} = 20^\circ\text{C}$. Os blocos estão em uma caixa isolada termicamente e estão separados por uma divisória isolante. Quando levantamos a divisória, os blocos acabam chegando a uma temperatura de equilíbrio $T_f = 40^\circ\text{C}$.



a) Qual a variação de entropia resultante do sistema de dois blocos durante esse processo irreversível?

Depois que a divisória isolante é retirada, os blocos trocam calor até atingirem o equilíbrio térmico. Ou seja:

$$\Delta Q = \Delta Q_e + \Delta Q_d = 0$$

$$mc(T - T_e) + mc(T - T_d) = 0 \quad \therefore \quad T = \frac{T_e + T_d}{2}$$

Para calcular a entropia neste processo irreversível, usamos o fato que a entropia é uma função de estado e, portanto o seu valor depende apenas do estado em que se encontra, não importando o processo através do qual alcançou este estado. Podemos imaginar que cada um dos blocos alcançou o seu estado final através de processos reversíveis.

Por exemplo, cada um bloco poderia ter a sua temperatura modificada lentamente através da troca de calor com um banho térmico (reservatório) adequado até que atingissem a temperatura de equilíbrio original T . Desse modo podemos calcular a variação de entropia para cada um dos blocos:

$$dS = \frac{dQ}{T} = mc \frac{dT}{T} \quad \therefore \quad \Delta S = mc \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

ou seja:

$$\begin{cases} \Delta S_e = mc \ln \left(\frac{T}{T_e} \right) \\ \Delta S_d = mc \ln \left(\frac{T}{T_d} \right) \end{cases}$$

$$\Delta S_T = \Delta S_e + \Delta S_d = mc \left\{ \ln \left(\frac{T}{T_e} \right) + \ln \left(\frac{T}{T_d} \right) \right\} = mc \ln \left[\frac{T^2}{T_e T_d} \right] = mc \ln \left[\frac{(T_e + T_d)^2}{2T_e T_d} \right]$$

No entanto:

$$(T_e + T_d)^2 = T_e^2 + T_d^2 + 2T_e T_d \quad \therefore \quad (T_e + T_d)^2 > 2T_e T_d \quad \Rightarrow \quad \frac{(T_e + T_d)^2}{2T_e T_d} > 1$$

ou seja:

$$\ln \left[\frac{(T_e + T_d)^2}{2T_e T_d} \right] > 0$$

e, portanto

$$\Delta S_T > 0$$

- b)** Mostre que se o processo acontecesse no sentido inverso, a entropia do sistema diminuiria, violando a segunda lei da termodinâmica.

Se o processo acontecer no sentido inverso

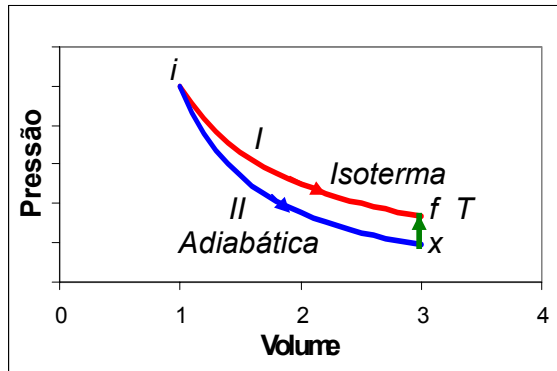
$$\begin{cases} \Delta S'_e = mc \ln \left(\frac{T_e}{T} \right) \\ \Delta S'_d = mc \ln \left(\frac{T_d}{T} \right) \end{cases}$$

$$\Delta S'_T = \Delta S'_e + \Delta S'_d = mc \ln \left[\frac{2T_e T_d}{(T_e + T_d)^2} \right] < 0$$

- 18 Um cilindro contém μ moles de um gás ideal monoatômico. Se o gás sofrer uma expansão isotérmica reversível do volume inicial V_i até o volume final V_f ao longo da trajetória I da figura ao lado, a sua variação de entropia é:

$$\Delta S = \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Agora considere a trajetória II da figura ao lado, que leva o gás do mesmo estado inicial i até o estado x por meio de uma expansão adiabática reversível, e depois deste estado x até o mesmo estado final f por meio de um processo reversível a volume constante



- a) Descreva como você poderia realizar os dois processos reversíveis para a trajetória II
- b) Mostre que a temperatura do gás no estado x é dada por:

$$T_x = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{2/3}$$

A transformação ix é adiabática, e numa transformação desse tipo para um gás ideal temos que:

$$pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \therefore T_i V_i^{\gamma-1} = T_x V_x^{\gamma-1}$$

mas

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3} \quad \therefore \gamma - 1 = \frac{2}{3}$$

ou seja:

$$T_x = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{2/3}$$

- c) Qual a energia Q_I transferida sob a forma de calor ao longo da trajetória I e a energia Q_{II} transferida sob a forma de calor ao longo da trajetória II ? Elas são iguais?

Ao longo da **trajetória I** temos um processo isotérmico. Considerando a primeira lei da termodinâmica, para uma transformação isotérmica ($dE = 0$), temos que:

$$dE = dQ - dW \Rightarrow dQ = dW = p dV$$

Ou seja:

$$dQ = \mu RT \frac{dV}{V} \quad \therefore \quad Q_I = \mu RT_i \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Ao longo da **trajetória II** temos um processo adiabático (**ix**) e um outro isovolumétrico (**xf**). Ou seja:

$$Q_{II} = Q_{ix} + Q_{xf}$$

Como no processo adiabático não existe troca de calor temos que $Q_{ix} = 0$. Para o processo isovolumétrico, temos que $\Delta V_{xf} = 0$. Usando a primeira lei da termodinâmica, temos que

$$dQ_{xf} = dE_{xf} + p dV_{xf}$$

ou seja:

$$dQ_{xf} = dE_{xf} = \mu C_V dT_{xf} \quad \therefore \quad Q_{xf} = \mu C_V (T_f - T_x)$$

- d) Qual a variação da entropia ΔS para a trajetória II? A variação de entropia para a trajetória I é igual a ela?

$$dS_I = \frac{dQ_I}{T} = \frac{dW_I}{T} = \frac{pdV}{T} = \mu R \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_I = \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\Delta S_{II} = \Delta S_{ix} + \Delta S_{xf}$$

Como o processo **ix** é adiabático, temos então que $\Delta S_{ix} = 0$ e, portanto:

$$dS_{II} = dS_{xf} = \frac{dQ_{xf}}{T} = \frac{dE_{xf}}{T} = \mu C_V \frac{dT_{xf}}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{II} = \mu C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_x}\right)$$

Por outro lado

$$\frac{T_f}{T_x} = \frac{T_i}{T_x} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{2/3}$$

e, portanto

$$\Delta S_{II} = \mu \left(\frac{3R}{2}\right) \ln\left[\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{2/3}\right] = \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

onde encontramos que:

$$\Delta S_I = \Delta S_{II}$$

- e) Calcule T_x , Q_I , Q_{II} e ΔS para $\mu = 1$, $T = 500K$ e $V_f/V_i = 2$.

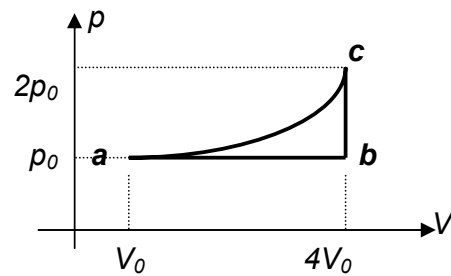
19 Um mol de um gás ideal percorre o ciclo da figura à seguir.

- a) Qual o trabalho realizado pelo gás para ir do estado **a** ao estado **c** ao longo da trajetória **abc** ?

$$W_{abc} = W_{ab} + W_{bc}$$

Como o processo **bc** é isovolumétrico, o trabalho para realizá-lo é nulo, e desse modo:

$$W_{abc} = \int_{V_a}^{V_b} p dV = p_a \int_{V_a}^{V_b} dV = p_a (V_b - V_a) = 3p_0 V_0$$



- b) Quais as variações de energia interna para ir de **b** para **c** e para percorrer um ciclo completo?

$$dE = \mu C_V dT \quad \therefore \quad \Delta E_{bc} = \mu C_V (T_c - T_b) = \frac{3}{2} (\mu R T_c - \mu R T_b) = \frac{3}{2} (p_c V_c - p_b V_b)$$

$$\Delta E_{bc} = \frac{3}{2} [(2p_0)(4V_0) - (p_0)(4V_0)] = \frac{3}{2} (4p_0 V_0) = 6p_0 V_0 = 6\mu R T_0$$

Como a energia interna é uma função de estado, a sua variação em um ciclo completo é nula.

- c) Quais as variações de entropia para ir de **b** para **c** e para percorrer um ciclo completo?

Como o processo **bc** é isovolumétrico, o trabalho para realizá-lo é nulo, e desse modo a primeira lei da termodinâmica toma a forma:

$$dQ_{bc} = dE_{bc} = \mu C_V dT_{bc}$$

Mas

$$dS_{bc} = \frac{dQ_{bc}}{T} = \mu C_V \frac{dT_{bc}}{T}$$

logo

$$\Delta S_{bc} = \mu C_V \int_{T_b}^{T_c} \frac{dT}{T} = \mu C_V \ln \left(\frac{T_c}{T_b} \right)$$

No entanto

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{p_c V_c / \mu R}{p_b V_b / \mu R} = \frac{p_c}{p_b} = \frac{2p_0}{p_0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{bc} = \frac{3}{2} \mu R \ln 2$$

Como a entropia é uma função de estado, a sua variação em um ciclo completo é nula.

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

23 Um motor de Carnot opera entre 235°C e 115°C , absorvendo $6,3 \times 10^4 \text{ J}$ por ciclo na temperatura mais alta.

a) Calcule a eficiência do motor.

$$\begin{aligned} T_a &= 235^{\circ}\text{C} = 508\text{K} \\ T_b &= 115^{\circ}\text{C} = 388\text{K} \\ Q_a &= 6,3 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_b}{T_a} = 1 - \frac{388}{508} = 0,2362 \Rightarrow \varepsilon(\%) = 23,62\%$$

b) Quanto trabalho por ciclo este motor é capaz de realizar?

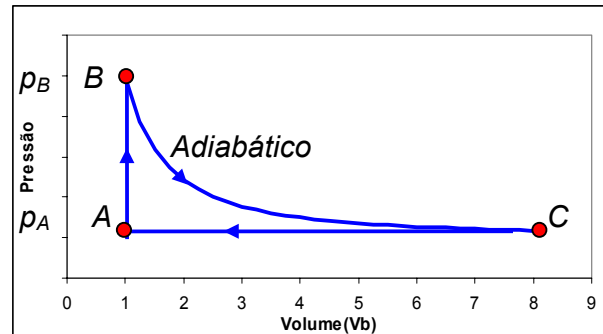
$$\varepsilon = \frac{W}{Q_a} \Rightarrow W = \varepsilon Q_a = 1,48 \times 10^4 \text{ J}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

27 Um mol de um gás ideal monoatômico percorre o ciclo reversível mostrado na figura ao lado. O processo BC é uma expansão adiabática, com $p_B = 10 \text{ atm}$ e $V_B = 10^{-3} \text{ m}^3$.

a) Determine a energia adicionada ao gás sob a forma de calor.

$$\begin{aligned} p_B &= 10 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V_B &= 10^{-3} \text{ m}^3 \end{aligned}$$



Como a transformação BC é adiabática:

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \Rightarrow p_C = p_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^\gamma = p_B \left(\frac{V_B}{8V_B} \right)^{5/3} \therefore p_C = \frac{p_B}{32}$$

$$Q_T = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$$

Como o processo BC é adiabático, temos que $Q_{BC} = 0$. Por outro lado, o processo AB é isovolumétrico, de modo que o trabalho $dW_{AB} = 0$ e, portanto a primeira lei da termodinâmica toma a forma:

$$dQ_{AB} = dE_{AB} + dW_{AB} \Rightarrow dQ_{AB} = \mu C_V dT_{AB} \therefore Q_{AB} = \mu C_V (T_B - T_A)$$

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} (\mu R T_B - \mu R T_A) = \frac{3}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = \frac{3}{2} \left(p_B V_B - \frac{p_B}{32} V_B \right)$$

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{31}{32} p_B V_B = 147,20J$$

$$dQ_{CA} = dE_{CA} + dW_{CA} = \mu C_V dT + p dV$$

ou seja:

$$Q_{CA} = \mu C_V (T_A - T_C) + p_A (V_A - V_C)$$

$$Q_{CA} = \frac{3}{2} (p_A V_A - p_C V_C) + p_A (V_A - V_C) = \frac{5}{2} p_A (V_A - V_C)$$

$$Q_{CA} = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_B}{32} (V_B - 8V_B) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{32} p_B V_B = -55,39J$$

É fácil concluir que Q_{AB} é a energia adicionada ao gás sob a forma de calor.

- b) Determine a energia que deixa o gás sob a forma de calor.

Por outro lado, também é fácil concluir que Q_{CA} é a energia que deixa o gás sob a forma de calor.

- c) Determine o trabalho resultante realizado pelo gás.

$$W = Q_{AB} + Q_{CA} = 147,20J - 55,39J = +91,81J$$

- d) Determine a eficiência do ciclo.

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{91,81}{147,20} = 0,6237$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

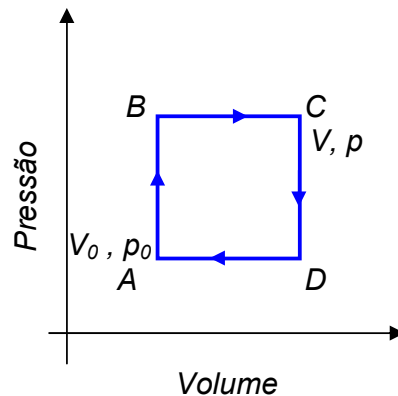
- 29 Um mol de um gás ideal monoatômico percorre o ciclo mostrado na figura ao lado. Suponha que $p = 2p_0$; $V = 2V_0$; $p_0 = 1,01 \times 10^5 Pa$ e $V_0 = 0,0225 m^3$.

- a) Calcule o trabalho realizado durante o ciclo

$$W_{abcta} = \int_{abcta} p dV = (p - p_0)(V - V_0)$$

$$W_{abcta} = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = p_0 V_0$$

$$W_{abcta} = 2.272,50J$$



- b) Calcule a energia adicionada sob a forma de calor durante o tempo ABC do motor.

$$Q_{abc} = Q_{ab} + Q_{bc}$$

$$dQ_{ab} = dE_{ab} = \mu C_V dT \quad \therefore \quad Q_{ab} = \mu C_V (T_b - T_a) = \frac{3}{2} (\mu R T_b - \mu R T_a)$$

$$Q_{ab} = \frac{3}{2} (p_b V_b - p_a V_a) = \frac{3}{2} [(2p_0)(V_0) - (p_0)(V_0)] = \frac{3}{2} p_0 V_0$$

$$Q_{ab} = 3.408,75J$$

$$dQ_{bc} = dE_{bc} + dW_{bc} = \mu C_V dT_{bc} + p dV_{bc} \quad \therefore \quad Q_{bc} = \mu C_V (T_c - T_b) + p_b (V_c - V_b)$$

$$Q_{bc} = \frac{3}{2} (p_c V_c - p_b V_b) + p_b (V_c - V_b) = \frac{5}{2} p_b (V_c - V_b) = \frac{5}{2} (2p_0) [(2V_0) - V_0] = 5p_0 V_0$$

$$Q_{bc} = 11.362,50J$$

e, portanto

$$Q_{abc} = \frac{3}{2} p_0 V_0 + 5p_0 V_0 = \frac{13}{2} p_0 V_0$$

$$Q_{abc} = 14,771,25J$$

c) Calcule a eficiência do ciclo.

$$\varepsilon = \frac{W_{abcda}}{Q_{abc}} = \frac{p_0 V_0}{\frac{13}{2} p_0 V_0} = \frac{2}{13} = 0,1538$$

$$\varepsilon(\%) = 15,38\%$$

d) Qual a eficiência de um motor de Carnot operando entre as temperaturas mais alta e mais baixa que ocorrem no ciclo? Como essa eficiência se compara com a calculada em (c).

$$T_a = \frac{p_a V_a}{\mu R} = \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) \qquad T_b = \frac{p_b V_b}{\mu R} = 2 \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) = 2T_a$$

$$T_c = \frac{p_c V_c}{\mu R} = 4 \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) = 4T_a \qquad T_d = \frac{p_d V_d}{\mu R} = 2 \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) = 2T_a$$

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_a}{T_c} = 1 - \frac{T_a}{4T_a} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\varepsilon_C(\%) = 75\%$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

30 No primeiro estágio de um motor de Carnot de dois estágios, a energia Q_1 é absorvida sob a forma de calor a uma temperatura T_1 , o trabalho W_1 é realizado e a energia Q_2 é expelida sob a forma de calor a uma temperatura T_2 . O segundo estágio absorve essa energia Q_2 , realiza o trabalho W_2 e expõe a energia Q_3 a uma temperatura ainda mais baixa T_3 . Prove que a eficiência do motor de dois estágios é $(T_1 - T_3)/T_1$.

$$\text{Est\u00e1gio 1} \begin{cases} \text{absorve } Q_1 \text{ em } T_1 \\ \text{produz } W_1 \\ \text{rejeita } Q_2 \text{ em } T_2 \end{cases} \quad \text{Est\u00e1gio 2} \begin{cases} \text{absorve } Q_2 \text{ em } T_2 \\ \text{produz } W_2 \\ \text{rejeita } Q_3 \text{ em } T_3 \end{cases}$$

Essa m\u00e1quina interage com a vizinhan\u00e7a absorvendo Q_1 numa temperatura T_1 , rejeitando Q_3 numa temperatura T_3 , e produzindo um trabalho $W_T = W_1 + W_2$. Em outras palavras:

$$W_T = W_1 + W_2 = |Q_1| - |Q_3|$$

$$\varepsilon = \frac{W_T}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_3|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_3|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$$

Cap\u00edtulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

32 Um mol de um g\u00e1s ideal \u00e9 usado como subst\u00e2ncia de trabalho de um motor que opera no ciclo mostrado na figura abaixo. BC e DA s\u00e3o processos adiab\u00e1ticos revers\u00edveis

a) O g\u00e1s \u00e9 monoat\u00f4mico, diat\u00f4mico ou poliat\u00f4mico?

Como o processo BC \u00e9 adiab\u00e1tico, temos que:

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$\frac{p_B}{p_C} = \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^\gamma$$

$$\frac{p_0}{32} = \left(\frac{16V_0}{2V_0} \right)^\gamma \quad \therefore 32 = 8^\gamma \quad \Rightarrow \quad \ln 32 = \gamma \ln 8$$

$$\gamma = \frac{\ln 32}{\ln 8} = \frac{5 \ln 2}{3 \ln 2} = \frac{5}{3}$$

Para um g\u00e1s monoat\u00f4mico:

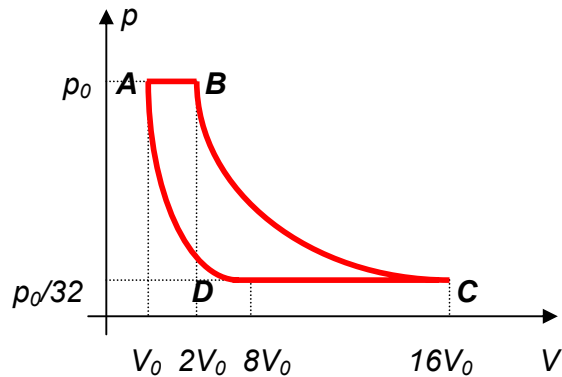
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3}$$

e, portanto o g\u00e1s utilizado \u00e9 monoat\u00f4mico.

b) Qual a efici\u00eancia do motor?

$$dQ = \mu C_V dT + p dV$$

Se a transforma\u00e7\u00e3o entre os estados inicial e final acontece com a press\u00e3o constante, temos que:



$$dQ = \mu C_V dT + p dV$$

Se a transformação entre os estados inicial e final acontece com a pressão constante, temos que:

$$Q_{if} = \mu C_V (T_f - T_i) + p_i (V_f - V_i)$$

$$Q_{if} = \frac{3}{2} (p_f V_f - p_i V_i) + p_i (V_f - V_i) \Rightarrow Q_{if} = \frac{5}{2} p_i (V_f - V_i)$$

Desse modo:

$$Q_{AB} = \frac{5}{2} p_A (V_B - V_A) = \frac{5}{2} p_0 (2V_0 - V_0) = \frac{5}{2} p_0 V_0$$

$Q_{BC} = 0$, pois se trata de um processo adiabático

$$Q_{CD} = \frac{5}{2} p_C (V_D - V_C) = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_0}{32} (8V_0 - 16V_0) = -\frac{5}{8} p_0 V_0$$

$Q_{DA} = 0$, pois se trata de um processo adiabático

Usando a primeira lei da termodinâmica, temos que em um ciclo:

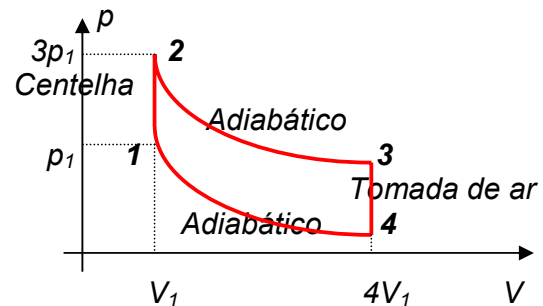
$$W = Q_{AB} + Q_{CD} = \left(\frac{5}{2} p_0 V_0 \right) + \left(-\frac{5}{8} p_0 V_0 \right) = \frac{15}{8} p_0 V_0$$

$$\varepsilon = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{\frac{15}{8} p_0 V_0}{\frac{5}{2} p_0 V_0} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \varepsilon(\%) = 75\%$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

33 A operação de um motor a gasolina de combustão interna está representada pelo ciclo na figura ao lado. Suponha que a mistura gasolina - ar de admissão é um gás ideal e use a razão de compressão 4:1 ($V_4 = 4V_1$). Suponha que $p_2 = 3p_1$.

- a) Determine a pressão e a temperatura em cada um dos pontos de vértice do diagrama $p - V$, em termos de p_1 , T_1 , e a razão γ entre os calores específicos molares do gás.



$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\mu R}$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{\mu R} = \frac{(3p_1)(V_1)}{\mu R} = 3 \frac{p_1 V_1}{\mu R} = 3T_1$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{\mu R} = \frac{(3 \cdot 4^{-\gamma} p_1)(4V_1)}{\mu R} = 3 \cdot 4^{1-\gamma} \left(\frac{p_1 V_1}{\mu R} \right)$$

$$T_3 = 3 \cdot 4^{1-\gamma} T_1$$

$$T_4 = \frac{p_4 V_4}{\mu R} = \frac{(4^{-\gamma} p_1)(4V_1)}{\mu R} = 4^{1-\gamma} \left(\frac{p_1 V_1}{\mu R} \right)$$

$$T_4 = 4^{1-\gamma} T_1$$

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \quad \therefore \quad p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma$$

$$p_3 = (3p_1) \left(\frac{V_1}{4V_1} \right)^\gamma = 3 \cdot 4^{-\gamma} p_1$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma \quad \therefore \quad p_4 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^\gamma$$

$$p_4 = (p_1) \left(\frac{V_1}{V_1} \right)^\gamma = 4^{-\gamma} p_1$$

b) Qual a eficiência do ciclo?

$$Q_T = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

Como as transformações **23** e **41** são adiabáticas, temos que:

$$Q_{23} + Q_{41} = 0$$

As transformações **12** e **34** acontecem a volume constante, e quando usamos a primeira lei da termodinâmica, temos que:

$$dQ_{if} = dE_{if} = \mu C_V dT_{if} \Rightarrow Q_{if} = \mu C_V (T_f - T_i)$$

e desse modo:

$$Q_{12} = \mu C_V (T_2 - T_1) = \mu C_V [(3T_1) - (T_1)] = 2\mu C_V T_1$$

e

$$Q_{34} = \mu C_V (T_4 - T_3) = \mu C_V [(4^{1-\gamma} T_1) - (3 \cdot 4^{1-\gamma} T_1)] = 2 \cdot 4^{1-\gamma} \mu C_V T_1$$

e finalmente

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_{34}|}{|Q_{12}|} = 1 - \frac{2 \cdot 4^{1-\gamma} \mu C_V T_1}{2\mu C_V T_1} = 1 - 4^{1-\gamma}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker
--

35	Um condicionador de ar de Carnot pega energia da energia térmica de uma sala a $70^{\circ}F$ e a transfere para um ambiente externo, que está a $96^{\circ}F$. Para cada Joule de energia elétrica necessária para operar o condicionador de ar, quantos Joules de calor serão removidos do quarto?
----	--

$$\begin{aligned} T_F &= 70^{\circ}F \\ T_Q &= 96^{\circ}F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_F &= 294,26K \\ T_Q &= 308,70K \end{aligned}$$

Para efetuar as transformações das escalas de temperatura, usamos que:

$$\begin{cases} T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 \\ T_C = T_K - 273,15 \end{cases} \Rightarrow T_K = 273,15 + \frac{5}{9} (T_F - 32)$$

O coeficiente de desempenho de um refrigerador de Carnot é definido como:

$$\kappa = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}$$

$$\kappa = 20,37$$

E, portanto podemos dizer que para cada Joule de trabalho W fornecido pelo motor elétrico serão retirados $20,37 \text{ Joules}$ de calor do quarto.

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

37 Uma bomba térmica é usada para aquecer um edifício. A temperatura externa é de $-5,0^{\circ}\text{C}$, e a temperatura dentro do edifício deve ser mantida a 22°C . O coeficiente de desempenho da bomba é de 3,8, e a bomba térmica entrega $7,54\text{MJ}$ de calor para o edifício a cada hora. Se a bomba térmica for um motor de Carnot trabalhando no sentido inverso, a que taxa deve-se realizar trabalho para fazer funcionar a bomba térmica?

$$T_F = -5^{\circ}\text{C} = 268,15\text{K}$$

$$T_Q = 22^{\circ}\text{C} = 295,15\text{K}$$

$$|Q_Q|/t = 7,5 \times 10^6 \text{ Joules/hora}$$

$$\kappa = 3,8$$

$$\kappa = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} \Rightarrow |Q_F| = \frac{\kappa}{1 + \kappa} |Q_Q|$$

portanto

$$W = |Q_Q| - |Q_F| = \frac{1}{1 + \kappa} |Q_Q| \quad \therefore P = \frac{W}{t} = \frac{1}{1 + \kappa} \frac{|Q_Q|}{t}$$

$$P = 1,56 \times 10^6 \text{ J/hora} = 434,02 \text{ watts}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

41 Um motor de Carnot trabalha entre as temperaturas T_1 e T_2 . Ele aciona um refrigerador de Carnot que trabalha entre as temperaturas T_3 e T_4 . Determine a razão Q_3/Q_1 em termos de T_1 , T_2 , T_3 e T_4 .

A eficiência de uma máquina de Carnot é definida como:

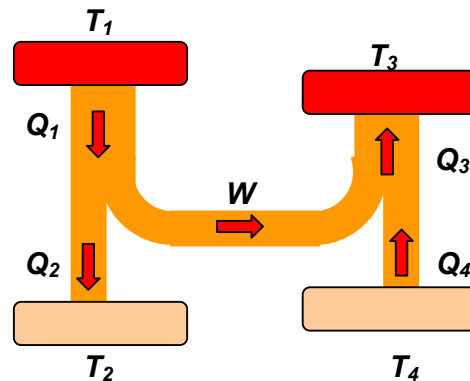
$$\varepsilon = \frac{W}{|Q_Q|} = \frac{|Q_Q| - |Q_F|}{|Q_Q|}$$

O coeficiente de desempenho de um refrigerador de Carnot é definido como:

$$\kappa = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}$$

Considerando que:

- 1 – fonte quente
- 2 – fonte fria
- 3 – fonte quente
- 4 – fonte fria



$$\varepsilon = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\kappa = \frac{|Q_4|}{|Q_3| - |Q_4|} = \frac{T_4}{T_3 - T_4}$$

Por outro lado, como a máquina e o refrigerador estão conectados, os trabalhos envolvidos em ambos os processos são iguais, ou seja:

$$W = |Q_1| - |Q_2| = |Q_3| - |Q_4|$$

$$\kappa = \frac{|Q_4|}{|Q_3| - |Q_4|} \Rightarrow |Q_4| = \frac{\kappa}{1 + \kappa} |Q_3|$$

Logo

$$\varepsilon \kappa = \frac{W |Q_4|}{|Q_1| W} = \frac{|Q_4|}{|Q_1|} \Rightarrow \varepsilon \kappa = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \frac{|Q_3|}{|Q_1|}$$

ou seja:

$$\frac{|Q_3|}{|Q_1|} = (\varepsilon \kappa) \left(\frac{1 + \kappa}{\kappa} \right) = \varepsilon (1 + \kappa)$$

ou ainda:

$$\frac{|Q_3|}{|Q_1|} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \left(1 + \frac{T_4}{T_3 - T_4} \right) = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{T_3}{T_3 - T_4} \right) = \frac{\left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)}{\left(1 - \frac{T_4}{T_3} \right)}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker
--

44	Uma caixa contém N moléculas de gás igualmente divididas entre as suas duas metades. Para $N = 50$:
----	--

a) Qual a multiplicidade desta configuração central?

Se um sistema tem N componentes idênticos que podem ocupar duas situações distintas, a multiplicidade de um estado com n componentes em uma situação e os componentes restantes $N-n$ na outra situação é dada por

$$C_N^n = \frac{N!}{n! N!}$$

Na situação específica do problema, temos que:

$$C_{50}^{25} = \frac{50!}{25! 25!} \cong 1,26 \times 10^{14}$$

b) Qual o número total de microestados para o sistema?

O número de microestados de um sistema com N componentes que podem ocupar duas situações, é dado por 2^N , nesse caso temos:

$$2^{50} = 1,13 \times 10^{15}$$

c) Que percentagem de tempo o sistema gasta em sua configuração central?

Como todos os estados são igualmente prováveis, o sistema passará em tese o mesmo tempo em cada um desses estados. No entanto os estados têm multiplicidade diferentes e desse modo o sistema passará um tempo $\tau(N, n)$ em um determinado estado proporcional a probabilidade da ocorrência deste estado, ou seja:

Prof. Romero Tavares da Silva

$$\tau(N, n) = \frac{\text{multiplicidade do estado}}{\text{número total de estados}} = \frac{C_N^n}{2^N}$$

$$\tau(50, 25) = \frac{C_{50}^{25}}{2^{50}} = 0,111$$