

# Notas de Aula de Física

<b>20. TEORIA CINÉTICA DOS GASES .....</b>	<b>2</b>
UMA NOVA MANEIRA DE VER OS GASES .....	2
O NÚMERO DE AVOGADRO.....	2
GASES IDEAIS.....	2
<i>Trabalho com temperatura constante .....</i>	<i>3</i>
CÁLCULO CINÉTICO DA PRESSÃO.....	3
ENERGIA CINÉTICA DE TRANSLAÇÃO .....	6
PERCURSO LIVRE MÉDIO .....	6
DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES MOLECULARES.....	7
CALORES ESPECÍFICOS MOLARES DE UM GÁS IDEAL .....	9
<i>A energia interna <math>E_{INT}</math>.....</i>	<i>9</i>
<i>Calor específico molar a volume constante – <math>C_V</math>.....</i>	<i>9</i>
<i>Calor específico molar a pressão constante – <math>C_P</math>.....</i>	<i>10</i>
<i>Relação entre <math>C_V</math> e <math>C_P</math> para um gás ideal.....</i>	<i>10</i>
TRANSFORMAÇÃO ADIABÁTICA DE UM GÁS IDEAL .....	11
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS .....	13
10.....	13
“10”.....	13
11.....	15
12.....	15
15.....	16
16.....	17
17.....	17
19.....	18
23.....	18
“27”.....	19
28.....	20
33.....	20
36.....	21
43.....	21
45.....	23
47.....	23
57.....	24
61.....	24

## 20. Teoria Cinética dos Gases

Quando consideramos um gás contido em um recipiente podemos analisá-lo de uma maneira global usando a Termodinâmica, e calcular as suas propriedades macroscópicas tais como temperatura, pressão, volume e etc.

Por outro lado, se quisermos entender os porquês do comportamento macroscópico, devemos analisar os constituintes deste gás, como eles interagem entre si e como interagem com as paredes do volume que os contém.

### **Uma nova maneira de ver os Gases**

Os gases são constituídos de pequenas entidades, que podem ser átomos, moléculas ou ambos. Ele será um gás monoatômico quando composto apenas de átomos (ou seja: moléculas monoatômicas) ou um gás poliatômico, dependendo das suas características moleculares.

As moléculas interagem entre elas, e essa interação acontece aos pares, ou seja elas interagem duas a duas. Se neste gás existirem  $N$  moléculas cada molécula interage com todas as outras  $N-1$  moléculas. Cada molécula deve ter o seu movimento governado pela segunda lei de Newton, e portanto temos  $N$  equações referentes a aplicação dessa lei, uma para cada molécula. Como cada molécula interage com as restantes, o seu movimento irá interferir no movimento de todas as outras, e dizemos então que essas equações estão acopladas uma as outras.

O número de equações resultante deste modelo torna a sua solução numérica impossível, mesmo usando os melhores computadores contemporâneos.

### **O Número de Avogadro**

Mas quantas moléculas existem em uma amostra macroscópica de uma dada substância? Vamos definir uma grandeza adequada para lidar com moléculas, é o mol. Um mol é o número de moléculas que existem em 12g de carbono-12. Experimentalmente se determina quantas moléculas existem em um mol, e esse é o chamado número de Avogadro  $N_A$ ,

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ moléculas}$$

Desse modo, já podemos relacionar número de moles  $\mu$  e número de moléculas  $N$ , ou seja:

$$N = \mu N_A \Rightarrow \mu = \frac{N}{N_A}$$

### **Gases ideais**

Se considerarmos uma amostra com 12g de carbono-12, teremos neste material  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  moléculas, e se desejarmos usar a segunda lei de Newton para calcular as trajetórias das moléculas, teremos que resolver  $N_A$  equações acopladas. O que fazer nesta situação?

A aproximação mais drástica possível será considerar que as moléculas não

interagem, elas se ignoram, e desse modo elas interagem apenas com as paredes do recipiente que contém a mostra do gás. Apesar desta aproximação ser drástica, ela se aproxima da realidade em muitas situações práticas, quando a densidade do gás é suficientemente baixa. Nestas circunstâncias, uma amostra de um gás real se aproxima do modelo do gás ideal.

Trabalhos experimentais com gases ideais mostraram que a pressão, temperatura e volume se relacionam de tal modo que:

$$p V = \mu R T$$

onde  $\mu$  é o número de moles do gás presentes na amostra considerada e  $R=8,31\text{J/mol.K}$  é a constante universal dos gases. A equação anterior é chamada equação dos gases ideais. Por outro lado, se ao invés de moles estivermos usando o número de moléculas, a equação tomará a forma

$$p V = N k_B T$$

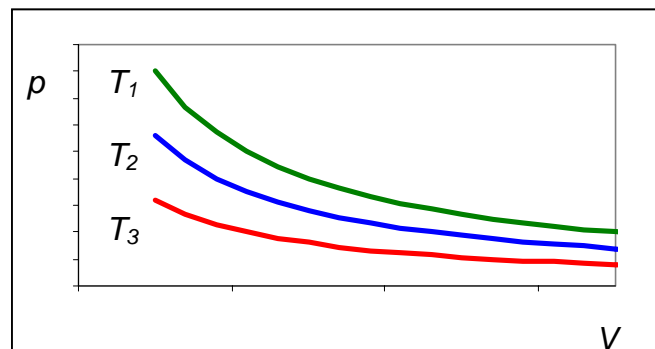
onde  $N$  é o número de moléculas do gás presentes na amostra considerada e  $k_B=1,38 \times 10^{-23}\text{J/K}$  é a constante de Boltzmann. Pode-se notar que:

$$\mu R = N k_B \Rightarrow k_B = \frac{\mu}{N} R = \frac{R}{N_A} \therefore R = k_B N_A$$

### Trabalho com temperatura constante

Vamos considerar um sistema em contato com um reservatório térmico. Nessas condições esse sistema pode sofrer mudanças de pressão e volume mas manterá sempre a mesma temperatura, que é a temperatura do reservatório térmico. O trabalho realizado pelo sistema é definido como:

$$W_{if} = \int_{V_i}^{V_f} p dV$$



$$T_1 > T_2 > T_3$$

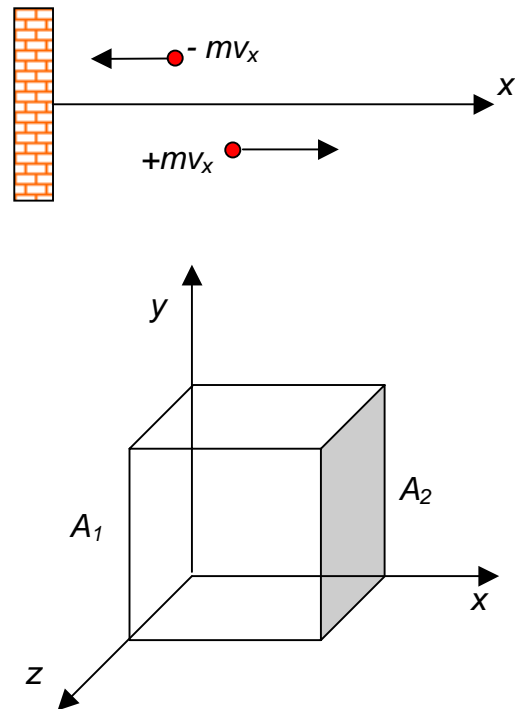
Mas como o gás é ideal e a temperatura é mantida constante ao longo da transformação, temos que:

$$W_{if} = \mu R T \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu R T (\ln V) \Big|_{V_i}^{V_f} = \mu R T (\ln V_f - \ln V_i) = \mu R T \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

### Cálculo cinético da pressão

Vamos considerar  $N$  moléculas um gás ideal em um recipiente em forma de um cubo de aresta  $L$  e considerar os eixos cartesianos paralelos as arestas, como na figura à seguir.

As moléculas desse gás estão continuamente colidindo com as paredes do recipiente. Vamos analisar especificamente a colisão de uma molécula, que se dirige para colidir com a parede do recipiente paralela ao plano  $yz$  e que passa pela origem. Quando ela colide com a parede, não acontecerá mudança nas componentes  $y$  e  $z$  do momento linear, mas a componente  $x$  do momento linear mudará de sinal, acontecerá uma reversão neste movimento. Estamos considerando que as colisões são perfeitamente elásticas. A variação do momento dever-se-á apenas a mudança da componente  $x$ .



$$\Delta p = p_f - p_i = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as paredes do cubo perpendiculares ao eixo  $x$ . A molécula vai colidir com a face  $A_1$  e levar um intervalo de tempo  $\Delta t$  para colidir com a face oposta  $A_2$  e depois colidir novamente com  $A_1$ .

O tempo  $t$  necessário para essa molécula ir de uma face até outra é dado por  $t=L/v_x$ , e desse modo:

$$\Delta t = 2t = \frac{2L}{v_x}$$

A variação do momento linear de uma molécula, num intervalo  $\Delta t$  entre duas colisões com a mesma face do recipiente é dada por:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}$$

A equação anterior nos dá a força que uma molécula exerce na face considerada. Para se encontrar a força total exercida por todas as moléculas, devemos considerar as contribuições de todas as  $N$  moléculas:

$$F_x = \frac{m}{L} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2)$$

A pressão que essas moléculas exercerão dependerá da força média e será dada por:

$$p = \frac{\langle F_x \rangle}{L^2} = \frac{m}{L^3} (\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle)$$

onde estamos representando o valor médio de uma grandeza  $A$  por  $\langle A \rangle$ . Como as moléculas não são distinguíveis, os valores médios das componentes  $x$  de cada uma das moléculas são iguais, ou seja:

$$\left(\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle\right) = N \langle v_x^2 \rangle$$

Considerando que neste cubo não existe direção privilegiada, os valores médios das diversas componentes serão iguais, ou seja:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

e como temos  $N$  moléculas nesse gás ideal;

$$\left(\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle\right) = N \langle v_x^2 \rangle = \frac{N}{3} \langle v^2 \rangle$$

Desse modo:

$$p = \frac{\langle F_x \rangle}{L^2} = \frac{m}{L^3} \left(\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle\right) = \frac{mN}{3V} \langle v^2 \rangle$$

onde consideramos que o volume do cubo é  $V = L^3$ . Podemos ainda dizer que:

$$pV = \frac{mN}{3} \langle v^2 \rangle$$

Mas  $Nm$  é a massa total do gás pois:  $N$  é número de moléculas e  $m$  é a massa de cada molécula. Por outro lado, a massa total também pode ser expressa como  $\mu M$  pois:  $\mu$  é o número de moles e  $M$  é a massa molar. Portanto, usando a equação dos gases ideais:

$$pV = \frac{\mu M}{3} \langle v^2 \rangle = \mu RT \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{M}$$

e se definirmos

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

(RMS = root mean square) encontramos que:

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Entretanto a massa molar  $M$  é igual ao número de Avogadro vezes a massa  $m$  de uma molécula  $M = N_A m$ , e a constante universal dos gases pode ser escrita como  $R = N_A k_B$ , e desse modo teremos que:

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

### Energia cinética de translação

Como já foi mencionada, em um gás ideal as moléculas não interagem, portanto não existem energia potencial e o único tipo de energia possível é a energia cinética de translação. A energia cinética média de uma partícula é dada por:

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{2} \frac{3k_B T}{m}$$

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

### Percurso livre médio

Entre colisões sucessivas, o movimento de uma molécula de um gás ideal é retilíneo e uniforme. A distância média que uma molécula percorre entre duas colisões sucessivas é chamado percurso livre médio.

Se tivermos duas moléculas de diâmetro  $d$ , ocorrerá uma colisão quando os seus centros se aproximarem de uma distância  $d$ .

Uma descrição equivalente das colisões entre moléculas consiste em considerar uma delas pontual e a outra com diâmetro  $2d$ , pois colisão ocorrerá quando os seus centros se aproximarem de uma distância  $d$ , como na situação anterior.

Se estivermos observando uma molécula nas suas múltiplas colisões, podemos considerar que ela tem um diâmetro  $2d$  e as outras são pontuais.

Se ela tem diâmetro  $2d$  e velocidade média  $\langle v \rangle$ , num intervalo de tempo  $t$ , ela terá descrito um cilindro de seção reta  $\pi d^2$  e comprimento  $\langle v \rangle t$ . Se a densidade de partículas no gás for  $n = N/V$ , existirão no cilindro  $N$  partículas, onde:

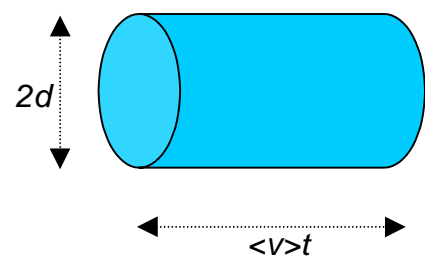
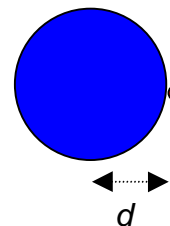
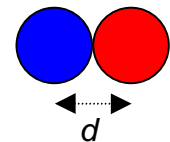
$$N = n V = n (\pi d^2 \cdot \langle v \rangle t)$$

Este número de partículas  $N$  será exatamente o número de colisões num dado intervalo de tempo  $t$ . O percurso livre médio  $\langle L \rangle$  será a distância percorrida num intervalo de tempo  $t$  dividido pelo número de colisões que acontecerá neste trajeto.

$$\langle L \rangle = \frac{\langle v \rangle t}{N} = \frac{\langle v \rangle t}{n \pi d^2 \langle v \rangle t} = \frac{1}{n \pi d^2}$$

ou ainda

$$\langle L \rangle = \frac{V}{N \pi d^2}$$



Esse resultado é apenas uma primeira aproximação, por que ele se baseia na hipótese que todas as moléculas estão em repouso, e apenas uma se move.

### Distribuição de velocidades moleculares

Vamos considerar um número  $N$  de moléculas que estão no interior de um recipiente de volume  $V$ . As moléculas têm velocidade diferentes, mas essas velocidades se distribuem segundo uma característica própria.

Se considerarmos uma situação genérica, onde a energia interna  $E$  de cada molécula é composta da soma de sua energia cinética  $K$  mais sua energia potencial  $U$ , e desse modo:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + U(x, y, x)$$

A função que explicita a distribuição de velocidades, é a distribuição de Maxwell-Boltzmann, e tem a forma:

$$f(E) = Ae^{-E/k_B T}$$

onde  $A$  é uma constante. Essa constante pode ser determinada se considerarmos que integral da função de distribuição deve ser igual ao número de moléculas. Quando estamos analisando um gás ideal, a energia potencial é desprezada, e temos como energia interna apenas a energia cinética:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

e portanto:

$$f(v) = Ae^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2k_B T}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z) = N$$

ou seja:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = N$$

e por outro lado, seja:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aX^2} dX$$

Podemos dizer que:

$$B^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aX^2} dX \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aY^2} dY = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr e^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{2a} e^{-u} = -\frac{2\pi}{2a} e^{-u} \Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{a} (0 - 1) = \frac{\pi}{a}$$

ou seja:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aX^2} dX = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

e

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = N$$

logo

$$A \left( \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \right)^3 = N \Rightarrow A = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

e portanto

$$f(v) = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2k_B T}$$

Se fizermos a mudança de variáveis para coordenadas esféricas, encontraremos que:

$$\int_0^{\infty} 4\pi v^2 dv f(v) = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} = N$$

Podemos então definir uma função de distribuição de velocidades  $F(v)$  que depende do módulo do vetor velocidade, ou seja:

$$F(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T}$$

Pode-se mostrar que:

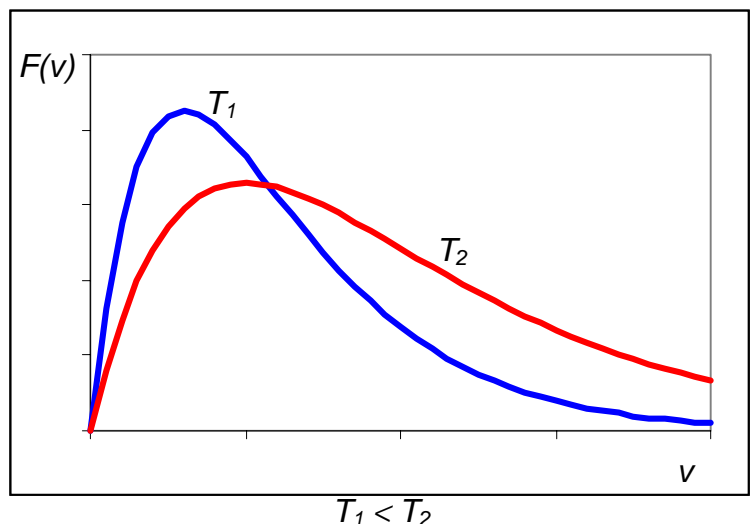
$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1$$

Tem-se que:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

e

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m}$$



A velocidade mais provável em uma gás é aquela na qual a função de distribuição de velocidades  $F(v)$  é máxima, e nestas circunstâncias:

$$\frac{dF(v)}{dv} = 0 \Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$



### Calores específicos molares de um gás ideal

Se tivermos uma certa massa  $m$  de uma substância, podemos tentar relacionar qual a variação de temperatura  $\Delta T$  que sofrerá essa massa, quando ela absorver uma quantidade de calor  $\Delta Q$ . Existe uma relação, que tem a forma:

$$\Delta Q = m c \Delta T$$

onde chamamos a grandeza  $c$  de calor específico. Quando lidamos com gases, surge a necessidade de definir uma relação mais específica que leve em contas as especificidades deste fluido. Definimos o *calor específico a volume constante* para relacionar variação de temperatura  $\Delta T$  que sofrerá um gás, quando ele absorver uma quantidade de calor  $\Delta Q$ ; na situação em que o recipiente que contém o gás é mantido a volume constante. De maneira equivalente, definimos o *calor específico a pressão constante* para relacionar variação de temperatura  $\Delta T$  que sofrerá um gás, quando ele absorver uma quantidade de calor  $\Delta Q$ ; na situação em que o recipiente que contém o gás é mantido a pressão constante

A energia interna  $E_{INT}$

Vamos considerar uma gás ideal monoatômico, ou seja as suas moléculas têm apenas um átomo. Ao nível dessa nossa descrição da Natureza, não estamos considerando a estrutura interna dos átomos e portanto eles podem ter apenas um tipo de energia: a energia associada ao seu movimento. Desse modo, a energia total das  $N$  moléculas monoatômicas que compõe esse gás terá a forma:

$$E_{INT} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} \mu R T$$

Calor específico molar a volume constante –  $C_V$

Como mencionado anteriormente, podemos definir o calor específico molar a volume constante como:

$$dQ_V = \mu C_V dT$$

ou ainda:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V$$

Usando a primeira lei da Termodinâmica, temos que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e se considerarmos uma transformação isovolumétrica:

$$(dE_{INT})_V = dQ_V$$

ou seja:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_{INT}}{\partial T} \right)_V$$

e para um gás ideal, encontramos

$$C_V = \frac{3}{2} R$$

Calor específico molar a pressão constante –  $C_P$

Como mencionado anteriormente, podemos definir o calor específico molar a pressão constante como:

$$dQ_P = \mu C_P dT$$

ou ainda:

$$C_P = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P$$

Usando a primeira lei da Termodinâmica, temos que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e se considerarmos uma transformação que envolva uma variação de temperatura, mas com o sistema mantido a pressão constante, temos que:

$$\left( \frac{\partial E_{INT}}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P - p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

onde lembramos que  $dQ$  não é uma diferencial exata, daí o aparente contra-senso ao envolver derivadas parciais e total, na equação anterior. Usando as definições de um gás ideal, temos que:

$$\begin{cases} E_{INT} = \frac{3}{2} \mu RT & \therefore \left( \frac{\partial E_{INT}}{\partial T} \right)_P = \frac{3}{2} \mu R \\ V = \frac{\mu RT}{p} & \therefore p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \mu R \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{3}{2} \mu R = \mu C_P - \mu R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2} R$$

Relação entre  $C_V$  e  $C_P$  para um gás ideal

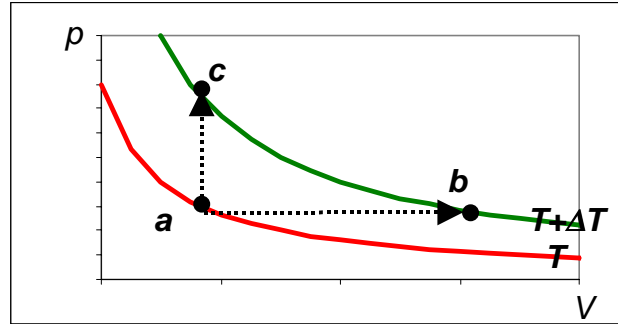
Vamos considerar um sistema formado por  $\mu$  moles de uma gás ideal, e a sua temperatura será aumentada  $T$  até alcançar  $T + \Delta T$  de duas formas diferentes. As curvas que representam transformações isotérmicas nas duas temperaturas mencionadas

estão representadas no gráfico ao lado. A primeira transformação será feita a volume constante, e o gás vai do estado **a** até o estado **c**. A primeira lei da Termodinâmica diz que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e neste caso teremos que

$$\Delta E_{ac} = \Delta Q_V = \mu C_V \Delta T$$



A segunda transformação será feita a pressão constante, e o gás vai do estado **a** até o estado **b**. A primeira lei da Termodinâmica diz que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e neste caso teremos que

$$\Delta E_{ab} = \Delta Q_P - p \Delta V = \mu C_P \Delta T - p (\Delta V)_P$$

Como a energia interna de uma gás ideal depende apenas da sua temperatura, temos que:

$$\Delta E_{ac} = \Delta E_{ab}$$

e portanto:

$$\mu C_V \Delta T = \mu C_P \Delta T - p (\Delta V)_P$$

ou seja:

$$C_P - C_V = \frac{p}{\mu} \left( \frac{\Delta V}{\Delta T} \right) = \frac{p}{\mu} \left( \frac{\mu R}{p} \right) = R \quad \therefore \quad C_P = C_V + R$$

### Transformação adiabática de um gás ideal

Uma expansão adiabática é caracterizada por ser uma transformação onde o sistema não troca calor com as suas vizinhanças. Nestas circunstâncias, temos então que:

$$dE = dQ - p dV \quad \Rightarrow \quad dE = \mu C_V dT = - p dV$$

ou seja:

$$dT = - \frac{p}{\mu C_V} dV$$

Mas por outro, se diferenciarmos a equação do gás ideal encontramos que:

$$pV = \mu RT \quad \Rightarrow \quad pdV + Vdp = \mu R dT \quad \therefore \quad dT = \frac{pdV + Vdp}{\mu R}$$

e igualando os termos em  $dT$ , temos que:

$$dT = \frac{pdV + Vdp}{\mu R} = - \frac{p}{\mu C_V} dV$$

ou seja:

$$(C_V + R) p dV + C_V V dp = 0$$

Mostramos anteriormente que para um gás ideal:

$$C_P = C_V + R$$

logo:

$$C_P p dV + C_V V dp = 0$$

ou seja:

$$\frac{C_P}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Vamos definir  $\gamma = C_P/C_V$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \gamma \ln V + \ln p = \text{const} = \ln a$$

e portanto:

$$\ln(pV^\gamma) = \ln a \quad \therefore pV^\gamma = a = \text{const}$$

**Solução de alguns problemas**

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

10 Uma quantidade de oxigênio ocupando um volume de  $1000\text{cm}^3$  a  $40^\circ\text{C}$  e uma pressão de  $1,01 \times 10^5\text{Pa}$  se expande até um volume de  $1500\text{cm}^3$  e pressão  $1,06 \times 10^5\text{Pa}$

a) Encontre o número de moles de oxigênio no sistema.

$$\begin{aligned} V_1 &= 1000\text{cm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3 \\ T_1 &= 40^\circ\text{C} = 313\text{K} \\ p_1 &= 1,01 \times 10^5\text{Pa} \\ R &= 8,314\text{J/mol} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

$$pV = \mu RT \Rightarrow \mu = \frac{pV}{RT} = \frac{(1,01 \times 10^5)(10^{-3})}{(8,314)(313)} = 3,8 \times 10^{-2}\text{ moles}$$

b) Encontre a temperatura final do sistema.

$$\begin{aligned} V_2 &= 1500\text{cm}^3 = 1,5 \times 10^{-3}\text{m}^3 \\ p_2 &= 1,06 \times 10^5\text{Pa} \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = 492,74\text{K}$$

$$T_2 = 219,74^\circ\text{C}$$

Capítulo 20 – Halliday e Resnick – **Edição antiga**

“10” Um manômetro de mercúrio selado, tem dois ramos desiguais à mesma pressão  $p_0$ , como mostra a figura abaixo à esquerda. A área da seção reta do manômetro é  $1,0\text{cm}^2$ . Através de uma torneira no fundo do manômetro, admite-se no recipiente um volume adicional de mercúrio, igual a  $10\text{cm}^3$ . O nível da esquerda sobe de  $6,0\text{cm}$  e o nível da direita sobe de  $4,0\text{cm}$ . Determine a pressão  $p_0$ .

$$\begin{aligned} h_e' &= 50\text{cm} & h_d' &= 30\text{cm} \\ H_e &= 6\text{cm} & H_d &= 4\text{cm} \end{aligned}$$

$$\Delta H = H_e - H_d = 2\text{cm}$$

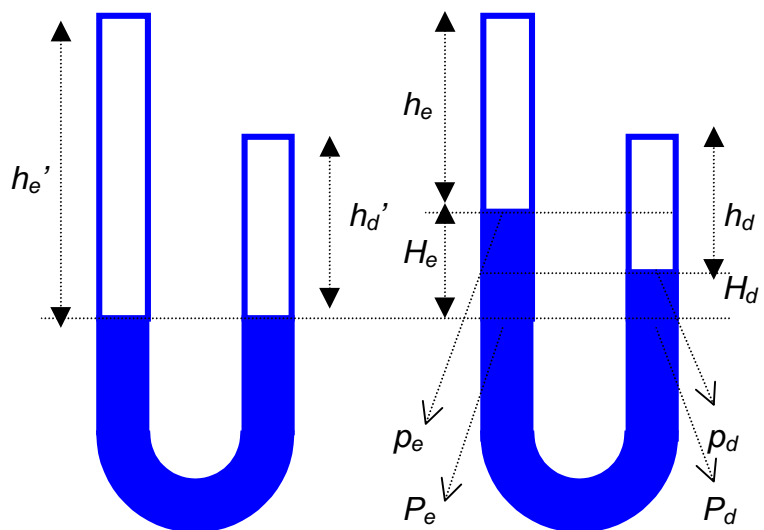
$$h_e = h_e' - H_e = 44\text{cm}$$

$$h_d = h_d' - H_d = 26\text{cm}$$

$$A = 1\text{cm}^2$$

$$\Delta V = 10\text{cm}^3$$

Tanto na situação inicial como na final, existe um gás acima do nível



do líquido, e a sua composição deve ser basicamente de mercúrio. Vamos considerar esse gás como ideal. Desse modo, considerando a situação inicial, teremos que:

$$\begin{aligned} p_0 V_d' &= \mu_d R T \\ p_0 V_e' &= \mu_e R T \end{aligned}$$

onde  $V$  é o volume ocupado por esse gás e  $\mu$  é o número de moléculas contido nele. Logo temos que:

$$p_0 = \frac{\mu_d R T}{V_d'} = \frac{\mu_e R T}{V_e'} \Rightarrow \frac{V_d'}{V_e'} = \frac{\mu_d}{\mu_e}$$

ou ainda:

$$\mu_d = \frac{p_0 V_d'}{R T} \quad e \quad \mu_e = \frac{p_0 V_e'}{R T}$$

Depois de adicionado um volume  $\Delta V$  de mercúrio, as colunas ficarão com níveis diferentes. Usando a hidrostática, poderemos relacionar as pressões em diferentes pontos do manômetro.

$$P_d = p_d + \rho g H_d$$

e

$$P_e = p_e + \rho g H_e$$

Como as pressões no mesmo nível horizontal do líquido são iguais, subtraímos a penúltima equação da última e encontramos que:

$$p_d - p_e = \rho g (H_e - H_d) = \rho g \Delta H$$

Por outro lado, o gás acima do nível de mercúrio terá um volume disponível diferente da situação inicial, e será diverso em cada ramo do manômetro. Ou seja:

$$\begin{cases} p_d V_d = \mu_d R T \\ p_e V_e = \mu_e R T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_d = \frac{\mu_d R T}{V_d} \\ p_e = \frac{\mu_e R T}{V_e} \end{cases}$$

e usando a equação anterior, encontramos que:

$$p_d - p_e = \left( \frac{\mu_d}{V_d} - \frac{\mu_e}{V_e} \right) R T = \rho g \Delta H \Rightarrow R T = \frac{\rho g \Delta H}{\left( \frac{\mu_d}{V_d} - \frac{\mu_e}{V_e} \right)}$$

e usando que

$$\frac{V_d'}{V_e'} = \frac{\mu_d}{\mu_e}$$

encontramos que

$$\mu_e R T = \rho g \Delta H \left( \frac{V_d V_e V_e'}{V_d' V_e - V_d V_e'} \right) = p_0 V_e'$$

ou seja:

$$p_0 = \rho g \Delta H \left( \frac{V_d V_e}{V_d' V_e - V_d V_e'} \right)$$

Lembrando que os volumes considerados são partes dos ramos do manômetro, que têm seção reta  $A$ , e desse modo  $V = A h$  e portanto:

$$p_0 = \rho g \Delta H \left( \frac{h_d h_e}{h_d' h_e - h_d h_e'} \right)$$

Usando que a densidade do mercúrio  $\rho = 1,36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$  encontramos que:

$$p_0 = 1,55 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,55 \text{ atm}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

11 A pressão  $p$ , o volume  $V$  e a temperatura  $T$  de um certo material estão relacionados através da equação:

$$p = \frac{AT - BT^2}{V}$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes. Encontre uma expressão para o trabalho realizado pelo material se a temperatura variar de  $T_1$  até  $T_2$  enquanto a pressão permanece constante.

O trabalho realizado pelo sistema quando ele passa de um estado para outro é definido como:

$$W_{12} = \int_1^2 p dV$$

e como a pressão permanece constante ( $p_1 = p_2$ ) nesse processo, temos que:

$$W_{12} = p_1 \int_1^2 dV = p_1 (V_2 - V_1) = p_2 V_2 - p_1 V_1$$

Usando a dependência funcional mencionada:

$$W_{12} = [AT_2 - BT_2^2] - [AT_1 - BT_1^2] = A(T_2 - T_1) - B(T_2^2 - T_1^2)$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

12 Um recipiente encerra dois gases ideais. Dois moles do primeiro gás estão presentes, com massa molar  $M_1$ . O segundo gás possui massa molar  $M_2 = 3M_1$ , e  $0,5 \text{ mol}$  deste gás está presente. Que fração da pressão total na parede do recipiente pode ser atribuída ao segundo gás?

(A explicação da pressão da teoria cinética conduz à descoberta experimentalmente de pressões parciais para uma mistura de gases que não reagem quimicamente: a *pressão total exercida pela mistura é igual à soma das pressões que os vários gases exerceriam separadamente se cada um deles ocupasse o recipiente sozinho.*)

$$M_1 \\ \mu_1 = 2 \text{ moles}$$

$$M_2 \\ \mu_2 = 0,5 \text{ mol}$$

$$(m_i) = (\mu_i) (M_i) \\ (\text{Massa}) = (\text{Número de moles}) (\text{Massa molar})$$

$$p_i V = \mu_i R T$$

$$p = p_1 + p_2 = (\mu_1 + \mu_2) RT/V$$

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\mu_1 RT/V}{(\mu_1 + \mu_2) RT/V} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = 0,8$$

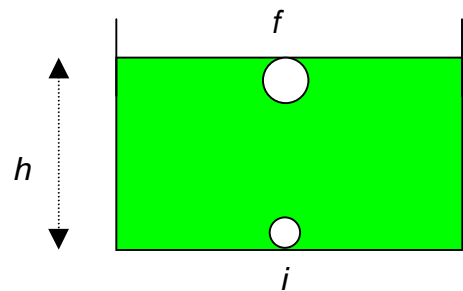
e de modo equivalente:

$$\frac{p_2}{p} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 0,2$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 15 Uma bolha de ar com volume de  $20 \text{ cm}^3$  está no fundo de um lago a  $40 \text{ m}$  de profundidade, onde a temperatura é  $4^\circ \text{ C}$ . A bolha sobe até a superfície, que está na temperatura de  $20^\circ \text{ C}$ . Considere que a temperatura da bolha de ar é a mesma que a da água ao seu redor. Exatamente quando a bolha atinge a superfície, qual o seu volume?

$$V_i = 20 \text{ cm}^3 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \quad \rho_A = 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ T_i = 4^\circ \text{ C} = 277 \text{ K} \quad p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ h = 40 \text{ m} \\ T_f = 20^\circ \text{ C} = 293 \text{ K}$$



Vamos chamar de situação inicial quando a bolha está no fundo do lago e situação final quando ela alcança a superfície. Temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = p_0 + \rho gh = \frac{\mu RT_i}{V_i} \\ p_f = p_0 = \frac{\mu RT_f}{V_f} \end{array} \right.$$

Temos duas equações e duas incógnitas,  $V_f$  e  $\mu$ .

$$\rho gh = \mu R \left( \frac{T_i}{V_i} - \frac{T_f}{V_f} \right) = \left( \frac{p_0 V_f}{T_f} \right) \left( \frac{T_i}{V_i} - \frac{T_f}{V_f} \right) = p_0 \left[ \left( \frac{T_i}{T_f} \right) \left( \frac{V_f}{V_i} \right) - 1 \right]$$



Ou seja:

$$\left(\frac{T_i}{T_f}\right)\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 1 + \frac{\rho gh}{p_0} \Rightarrow V_f = V_i \left(\frac{T_f}{T_i}\right) \left(1 + \frac{\rho gh}{p_0}\right) = 103 \text{cm}^3$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

16 Um tubo de comprimento  $L = 25\text{m}$  que está aberto em uma extremidade, contém ar a pressão atmosférica. Ele é empurrado na vertical para dentro de um lago de água doce até que a água suba até a metade do tubo, como mostrado na figura ao lado. Qual a profundidade  $h$  da extremidade inferior do tubo? Suponha que a temperatura é a mesma em todos os pontos e que não varie com o tempo.

$$L = 25\text{m}$$

$$p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{Pa}$$

$$\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$$

A pressão na superfície do líquido dentro do tubo, é a mesma do gás acima desta superfície, e é dada por:

$$p_f = p_0 + \rho g (h - L/2)$$

onde estamos explicitando que esta é a situação final do tubo. Na situação inicial, este tubo está a pressão atmosférica. Como foi dito, a temperatura é a mesma em todos os pontos e não varia com o tempo, temos que:

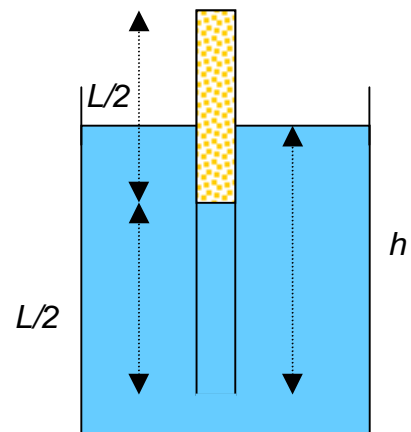
$$p_0 V_i = \mu RT = p_f V_f \Rightarrow p_f = p_0 \left(\frac{V_i}{V_f}\right) = p_0 \left(\frac{2V_f}{V_f}\right) \therefore p_f = 2p_0$$

ou seja:

$$p_f = p_0 + \rho g (h - L/2) = 2p_0 \Rightarrow p_0 = \rho g (h - L/2)$$

logo:

$$h = \frac{L}{2} + \frac{p_0}{\rho g} = 22,83\text{m}$$



Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

17 O recipiente  $A$  da figura abaixo contém um gás ideal a uma pressão de  $5,0 \times 10^5 \text{Pa}$  e a uma temperatura de  $300\text{K}$ . Ele está ligado por um tubo fino (e uma válvula fechada) ao recipiente  $B$ , com quatro vezes o volume de  $A$ . O recipiente  $B$  contém, o mesmo gás ideal a uma pressão  $1,0 \times 10^5 \text{Pa}$  e a uma temperatura de  $400\text{K}$ . A válvula é aberta para permitir que as pressões se igualem, mas a temperatura de cada recipiente é mantida constante em seus valores iniciais. Qual será então a pressão nos dois recipientes?

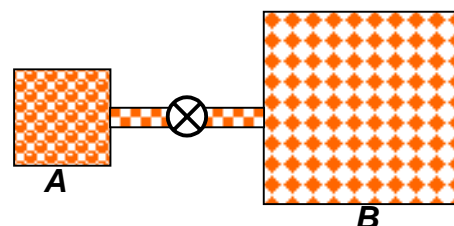
$$p_A = 5 \times 10^5 \text{Pa}$$

$$T_A = 300\text{K}$$

$$p_B = 1 \times 10^5 \text{Pa}$$

$$T_B = 400\text{K}$$

$$V_B = 4V_A$$



Temos claramente duas situações, antes da válvula ser aberta e depois que ela foi aberta. Depois que ela foi aberta existiu um fluxo de gás de um recipiente para outro de modo que as pressões foram equilibradas, mas a quantidade total de gás permaneceu a mesma. Logo:

$$\mu = \mu_A + \mu_B = \mu'_A + \mu'_B$$

onde os  $\mu$  são os números de moles em cada recipiente, antes e depois da válvula ser aberta. Usando a equação dos gases ideais encontramos que:

$$\begin{cases} p_A V_A = \mu_A RT_A \\ p_B V_B = \mu_B RT_B \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p V_A = \mu'_A RT_A \\ p V_B = \mu'_B RT_B \end{cases}$$

ou seja:

$$\mu = \mu_A + \mu_B = \frac{p_A V_A}{RT_A} + \frac{p_B V_B}{RT_B} = \frac{V_A}{R} \left( \frac{p_A}{T_A} + \frac{4p_B}{T_B} \right)$$

e também

$$\mu = \mu'_A + \mu'_B = \frac{p V_A}{RT_A} + \frac{p V_B}{RT_B} = \frac{p V_A}{R} \left( \frac{1}{T_A} + \frac{4}{T_B} \right)$$

ou ainda:

$$\mu = \frac{V_A}{R} \left( \frac{p_A}{T_A} + \frac{4p_B}{T_B} \right) = \frac{p V_A}{R} \left( \frac{1}{T_A} + \frac{4}{T_B} \right)$$

e portanto:

$$p = \frac{\left( \frac{p_A}{T_A} + \frac{4p_B}{T_B} \right)}{\left( \frac{1}{T_A} + \frac{4}{T_B} \right)} = 2,0 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

19 A temperatura mais baixa possível no espaço sideral é  $2,7\text{K}$ . Qual a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio a esta temperatura?

$$R = 8,31 \text{ J/mol.K}$$

$$M = 2,02 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$v_{QM} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 182 \text{ m/s}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

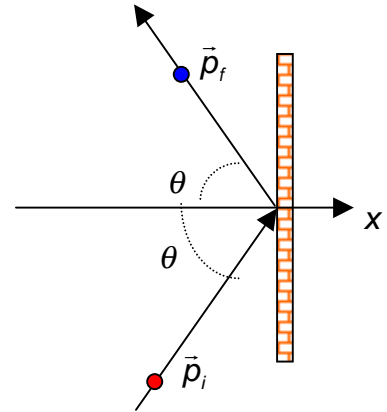
23 Um feixe de moléculas de hidrogênio ( $\text{H}_2$ ) está dirigido contra uma parede, segundo um ângulo de  $55^\circ$  com a normal à parede. Cada molécula no feixe possui uma velocidade escalar de  $1,0 \text{ km/s}$  e uma massa de  $3,3 \times 10^{-24} \text{ g}$ . O feixe bate na parede sobre uma área de  $2,0 \text{ cm}^2$ , à uma taxa média de  $10^{23}$  moléculas por segundo. Qual a pressão do o feixe sobre a parede?

$$\begin{aligned} n &= 10^{23} \text{ moléculas/s} & \theta &= 55^\circ \\ A &= 2 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & v &= 1 \text{ km/s} = 10^3 \text{ m/s} \\ m &= 3,3 \times 10^{-24} \text{ g} = 3,3 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

Como as moléculas só apresentam variação de momento na direção do eixo  $x$ , temos que:

$$\Delta p = p_{fx} - p_{ix} = (-m v_x) - (+m v_x) = -2 m v_x$$

$$v_x = v \cos 55^\circ \Rightarrow \Delta p = -2 m v \cos 55^\circ$$



A força total que as moléculas exercem na parede é resultado das contribuições de todas as  $N$  moléculas que colidem num intervalo de tempo  $\Delta t$ , ou seja:

$$F = N \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = \frac{N}{\Delta t} |\Delta p| = n |\Delta p|$$

A pressão  $P$  é definida em termos da força exercida pelas moléculas na parede, ou seja:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{n}{A} |\Delta p| = \frac{2nmv \cos 55^\circ}{A}$$

$$P = 1,89 \times 10^3 \text{ Pa} = 1,8 \times 10^2 \text{ atm}$$

Capítulo 20 – Halliday e Resnick – *Edição antiga*

“27”

Mostre que a variação de pressão na atmosfera terrestre, suposta isotérmica, é dada por:

$$p(y) = p_0 e^{-Mgy/RT}$$

Considerando a atmosfera um fluido em repouso, temos que:

$$dp = -\rho g dy$$

onde estamos considerando a superfície da Terra como a origem do eixo  $y$ , que mede a altura de um elemento de volume. Da equação anterior, temos que:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$

A equação dos gases ideais, nos diz que:

$$pV = \mu RT = \frac{m}{M} RT$$

onde  $m = \mu M$  é a massa de um elemento de volume,  $\mu$  é o número de moles contido nesse elemento de volume e  $M$  é a massa molecular da substância considerada. Desse modo:

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

onde  $\rho$  é a densidade do material considerado. A equação da variação da pressão terá a forma:

$$\frac{dp}{dy} = -\left(\frac{\rho M}{RT}\right)g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)dy$$

Integrando, temos que:

$$\ln p - \ln p_0 = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)(y - y_0)$$

Considerando que a superfície da Terra como origem do referencial,  $y_0 = 0$ , logo:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)y \Rightarrow p(y) = p_0 e^{-Mgy/RT}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

28 Mostre que a equação dos gases ideais  $pV = \mu RT$  pode ser escrita na forma alternativa  $p = \rho RT/M$  onde  $\rho$  é a massa específica do gás e  $M$  é a massa molar.

$$pV = \mu RT$$

onde

$$\mu = \frac{m}{M} = \frac{\text{massa da amostra}}{\text{massa molar}}$$

logo:

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \left(\frac{m}{V}\right)\frac{RT}{M}$$

e portanto:

$$p = \rho \frac{RT}{M}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

33 Qual a trajetória livre média para 15 balas de goma esféricas em um saco que é sacudido vigorosamente? O volume do saco é 1 litro e o diâmetro de uma bala é igual a 1,0 cm. Considere colisões de balas com balas, não colisões de balas com o saco.

$$N = 15 \text{ balas} \\ V = 1l = 10^{-3}m^3$$

$$d = 1,0cm = 10^{-2}m$$

$$\langle L \rangle = \frac{V}{N} \frac{1}{\pi d^2}$$

Devemos corrigir essa equação ao considerar que todas as moléculas estão se

movimentando. A equação corrigida tem a forma:

$$\langle L \rangle_c = \frac{V}{N} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2} = 0,150m = 15,0cm$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

36 Vinte e duas partículas têm as seguintes velocidades (  $N_i$  representa o número de partículas que possuem velocidade  $v_i$  )

$N_i$	2	4	6	8	2
$v_i$ (cm/s)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

a) Calcule a sua velocidade média  $v_M$ .

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N} = \frac{2 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 + 8 \times 4 + 2 \times 5}{2 + 4 + 6 + 8 + 2} = \frac{70}{22} = 3,18m/s$$

b) Calcule a sua velocidade média quadrática  $v_{RMS}$ .

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \frac{2 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + 6 \times 3^2 + 8 \times 4^2 + 2 \times 5^2}{2 + 4 + 6 + 8 + 2} = \frac{250}{22} = 11,36m^2/s^2$$

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 3,37m/s$$

c) Das cinco velocidades mostradas, qual a velocidade mais provável  $v_P$  ?

$$v_P = 4,0m/s$$

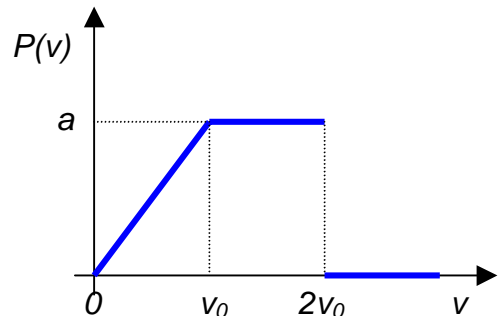
Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

43 A figura abaixo mostra uma distribuição hipotética de velocidades para uma amostra de  $N$  partículas de um gás (observe que  $P(v) = 0$  para  $v > 2v_0$ ).

a) Expresse  $a$  em termos de  $N$  e  $v_0$ .

Observando o gráfico de  $P(v)$  versus  $v$ , podemos notar que:

$$P(v) = \begin{cases} \left(\frac{a}{v_0}\right)v & \text{para } 0 \leq v \leq v_0 \\ a & \text{para } v_0 \leq v \leq 2v_0 \\ 0 & \text{para } v \geq 2v_0 \end{cases}$$



A condição de normalização no diz que:

$$\int_0^{\infty} P(v) dv = 1$$

e portanto:

$$\int_0^{v_0} \left[ \left( \frac{a}{v_0} \right) v \right] dv + \int_{v_0}^{2v_0} [a] dv = 1$$

$$\left( \frac{a}{v_0} \right) \frac{v_0^2}{2} + a(2v_0 - v_0) = \frac{av_0}{2} + av_0 = \frac{3av_0}{2} = 1$$

ou seja:

$$a = \left( \frac{2}{3v_0} \right)$$

**b)** Quantas das partículas possuem velocidades entre  $1,5v_0$  e  $2,0v_0$  ?

A fração de partículas  $(N_1/N)$ , com velocidade dentro deste intervalo, tem a forma:

$$\frac{N_1}{N} = \int_{1,5v_0}^{2,0v_0} P(v) dv = \int_{1,5v_0}^{2,0v_0} [a] dv = av \Big|_{1,5v_0}^{2,0v_0} = a(0,5v_0) = \left( \frac{2}{3v_0} \right) \left( \frac{v_0}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

ou seja:

$$N_1 = \frac{N}{3}$$

**c)** Expresse a velocidade média das partículas em termos de  $v_0$ .

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v P(v) dv$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{v_0} v \left[ \left( \frac{a}{v_0} \right) v \right] dv + \int_{v_0}^{2v_0} v [a] dv = \frac{a}{v_0} \frac{v^3}{3} \Big|_0^{v_0} + a \frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^{2v_0} = \frac{a}{v_0} \frac{v_0^3}{3} + \frac{a}{2} (4v_0^2 - v_0^2)$$

$$\langle v \rangle = \frac{a}{3} v_0^2 + \frac{3a}{2} v_0^2 = \frac{11}{6} av_0^2 = \frac{11}{6} \left( \frac{2}{3v_0} \right) v_0^2 = \frac{11}{9} v_0$$

**d)** Determine  $v_{RMS}$ .

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 P(v) dv$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{v_0} v^2 \left[ \left( \frac{a}{v_0} \right) v \right] dv + \int_{v_0}^{2v_0} v^2 [a] dv = \left( \frac{a}{v_0} \right) \frac{v^4}{4} \Big|_0^{v_0} + a \frac{v^3}{3} \Big|_{v_0}^{2v_0} = \left( \frac{a}{v_0} \right) \frac{v_0^4}{4} + \left( \frac{a}{3} \right) (8v_0^3 - v_0^3)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{av_0^3}{4} + \frac{7av_0^3}{3} = av_0^3 \left( \frac{1}{4} + \frac{7}{3} \right) = \left( \frac{31}{12} \right) \left( \frac{2}{3v_0} \right) v_0^3 = \left( \frac{31}{18} \right) v_0^2$$

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_0 \sqrt{\frac{31}{18}}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 45 Um mol de um gás ideal sofre uma expansão isotérmica. determine a energia adicionada ao gás sob a forma de calor em termos dos volumes inicial e final e da temperatura.

Como o gás é ideal, a sua energia interna é uma função apenas da temperatura. Se a transformação for isotérmica, a temperatura se mantém constante e portanto não existe variação da energia interna nesse processo. Desse modo, usando a primeira lei da termodinâmica, encontramos que:

$$(dE)_T = (dQ)_T - (dW)_T = 0 \quad \Rightarrow \quad (dQ)_T = (dW)_T$$

$$W_{if} = \int_i^f p dV = \mu RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f} = \mu RT (\ln V_f - \ln V_i)$$

$$Q_{if} = W_{if} = \mu RT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 47 Um recipiente contém uma mistura de três gases que não reagem entre si:  $\mu_1$  moles do primeiro gás com calor específico molar a volume constante  $C_{V1}$ , e assim por diante. Determine o calor específico molar a volume constante da mistura, em termos dos calores específicos molares e das quantidades dos gases em separado. O número total de moles desta mistura de três gases é dada por:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

e a quantidade de calor total absorvido (a volume constante) pela mistura será a soma dos calores absorvidos pelos diversos componentes:

$$dQ_V = dQ_{V1} + dQ_{V2} + dQ_{V3}$$

Calculando as derivadas:

$$\left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \left( \frac{dQ_1}{dT} \right)_V + \left( \frac{dQ_2}{dT} \right)_V + \left( \frac{dQ_3}{dT} \right)_V \quad \Rightarrow \quad \mu C_V = \mu_1 C_{V1} + \mu_2 C_{V2} + \mu_3 C_{V3}$$

$$C_V = \frac{\mu_1 C_{V1} + \mu_2 C_{V2} + \mu_3 C_{V3}}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

57 Sejam  $\mu$  moles de um gás ideal que se expande adiabaticamente de uma temperatura inicial  $T_1$  até uma temperatura final  $T_2$ . Prove que o trabalho realizado pelo gás é  $\mu C_V (T_2 - T_1)$ , onde  $C_V$  é o calor específico molar a volume constante.

O calor específico molar a volume constante é definido como:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_{int}}{\partial T} \right)_{V=const}$$

Mas a energia interna do gás ideal depende explicitamente apenas da temperatura, e neste caso, a derivada parcial se transforma em derivada total, ou seja:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \frac{dE_{int}}{dT} \Rightarrow dE_{int} = \mu C_V dT$$

A primeira lei da Termodinâmica diz que:

$$dE_{int} = dQ - dW$$

e para um gás ideal, temos que:

$$\mu C_V dT = dQ - dW$$

Quando a transformação for adiabática, não existe troca de calor com o ambiente, logo:

$$\mu C_V dT = -dW$$

e portanto:

$$W_{12} = -\mu C_V \int_{T_1}^{T_2} dT$$

ou seja:

$$W_{12} = \mu C_V (T_1 - T_2)$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

61 Um mol de um gás ideal monoatômico percorre o ciclo **123** da figura abaixo. O processo  $1 \rightarrow 2$  ocorre a volume constante, o processo  $2 \rightarrow 3$  é adiabático e o processo  $3 \rightarrow 1$  ocorre a pressão constante.

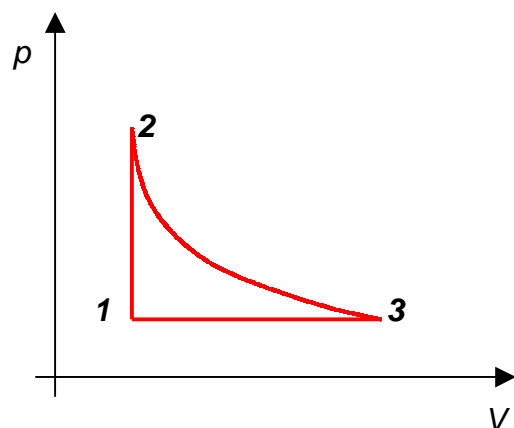
a) Calcule o calor  $Q$ , a variação de energia interna  $\Delta E_i$  e o trabalho realizado  $W$ , para cada um dos três processos e para o ciclo como um todo.

$$T_1 = 300K$$

$$T_2 = 600K$$

$$T_3 = 455K$$

$$dE_{int} = dQ - p dV$$



O processo  $1 \rightarrow 2$  é realizado a



volume constante:

$$dE_{int} = dQ \Rightarrow \Delta E_{int} = Q_{12}$$

Como se trata de um gás ideal monoatômico:

$$E_{int} = \frac{3}{2} \mu RT$$

ou seja:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} \mu R(T_2 - T_1)$$

e como temos apenas um mol:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} R(T_2 - T_1)$$

e portanto:

$$\Delta E_{int} = Q_{12} = 3.740J \\ W_{12} = 0$$

O processo 2  $\rightarrow$  3 é realizado adiabaticamente, ou seja  $dQ = 0$  e  $pV^\gamma = const$ .

$$dE_{int} = -dW \Rightarrow \Delta E_{int} = -W_{12}$$

Como se trata de um gás ideal monoatômico:

$$E_{int} = \frac{3}{2} \mu RT$$

ou seja:

$$W_{23} = -\frac{3}{2} \mu R(T_3 - T_2)$$

e como temos apenas um mol:

$$W_{23} = -\frac{3}{2} R(T_3 - T_2)$$

e portanto:

$$\Delta E_{int} = W_{23} = 1.807J \\ Q_{23} = 0$$

O processo 3  $\rightarrow$  1 é realizado a pressão constante. Usando a definição de trabalho, encontramos que:

$$W_{31} = \int_3^1 p dV = p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = p_1(V_1 - V_3)$$

e como o gás é ideal

$$pV = \mu RT$$

ou seja:

$$W_{31} = R(T_1 - T_3) = -1288J$$

A energia interna de um gás ideal é dada por:

$$E_{int} = \frac{3}{2} \mu RT$$

e portanto:

$$\Delta E_{int} = \frac{3}{2} R(T_1 - T_3) = -1932J$$

Usando a primeira lei da Termodinâmica, temos que:

$$\Delta E_{int} = Q_{31} - W_{31} \Rightarrow Q_{31} = \Delta E_{int} + W_{31}$$

ou seja:

$$Q_{31} = \frac{5}{2} R(T_1 - T_3) = -3220J$$

- b)** A pressão no ponto 1 é  $1,00atm$ . determine a pressão e o volume nos pontos 2 e 3. Use  $1,00atm = 1,013 \times 10^5 Pa$  e  $R = 8,314 J/mol \cdot K$

$$p_1 = 1,00atm = 1,013 \times 10^5 Pa$$
$$R = 8,314 J/mol \cdot K$$

$$T_1 = 300K$$

$$T_2 = 600K$$

$$T_3 = 455K$$

$$V_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0,246m^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_3 = p_1 \\ V_3 = \frac{RT_3}{p_3} = 0,0373m^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = V_1 \\ p_2 = \frac{RT_2}{V_2} = 2,0 \times 10^5 N/m^2 = 2,0atm \end{array} \right.$$