

Notas de Aula de Física

17. ONDAS I - ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS.....	2
ONDAS E PARTÍCULAS	2
ONDAS	2
ONDAS TRANSVERSAIS E LONGITUDINAIS	2
ONDAS PROGRESSIVAS	3
COMPRIMENTO DE ONDA E FREQUÊNCIA	4
VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DE UMA ONDA	5
VELOCIDADE DE UMA ONDA NUMA CORDA ESTICADA.....	6
ENERGIA E POTÊNCIA NUMA ONDA PROGRESSIVA	7
O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO.....	8
INTERFERÊNCIA - ONDAS NO MESMO SENTIDO	8
INTERFERÊNCIA - ONDAS EM SENTIDO CONTRÁRIO.....	9
<i>Reflexão de ondas na extremidade de uma corda.....</i>	<i>11</i>
ONDAS ESTACIONÁRIAS E RESSONÂNCIA.....	11
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	13
05.....	13
“09”.....	13
“11”.....	15
12.....	15
13.....	16
“15”.....	16
20.....	16
23.....	17
27.....	19
32.....	20
34.....	20
35.....	21
“38”.....	21
40.....	22

17. Ondas I - Ondas em meios elásticos

Quando você joga uma pedra no meio de um lago, ao se chocar com a água ela criará uma onda que se propagará em forma de um círculo de raio crescente, que se afasta do ponto de choque da pedra. As ondas também podem se propagar em uma corda esticada, presa por suas extremidades; se introduzirmos uma perturbação num ponto qualquer dessa ela se propagará ao longo da corda. Esses são dois exemplos de ondas que necessitam de um meio para se propagar.

O som necessita de um meio para se propagar. A luz também é uma onda, e em particular uma onda eletromagnética. Ondas eletromagnéticas podem se propagar em um meio ou no vácuo.

Ondas e partículas

Escrever uma carta ou usar o telefone são duas maneiras de se entrar em contato com uma amiga numa cidade distante.

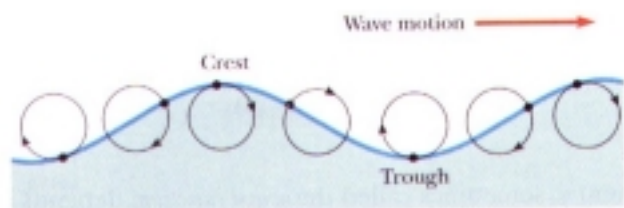
A primeira opção (a carta) envolve o conceito de partícula. Um objeto material se desloca de um ponto para outro, carregando consigo a informação e energia.

A segunda opção (o telefone) envolve o conceito de onda. Numa onda, informação e energia se deslocam de um ponto para outro, mas nenhum objeto material está realizando esta viagem. Em uma onda não existe o transporte de matéria

Ondas

As ondas no mar movem-se com velocidade perceptível. Mas cada partícula de água meramente oscila em torno de seu ponto de equilíbrio.

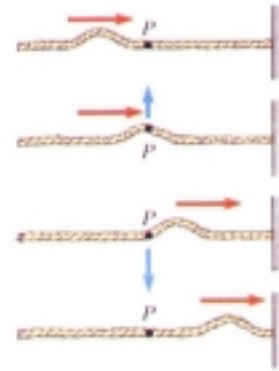
As partículas descrevem um movimento circular e temos uma combinação de um movimento na direção de movimento da onda com um movimento perpendicular à direção de movimento da onda.



Ondas transversais e longitudinais

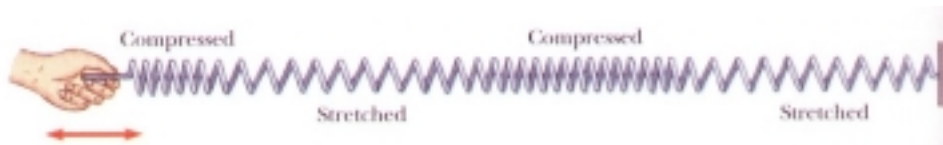
Inicialmente a corda está esticada horizontalmente e em repouso. Introduce-se uma perturbação de modo a se criar uma corcova na corda, e a onda dessa forma se propaga. Depois da passagem da perturbação por um dado pedaço da corda ela retornará a sua situação original de repouso.

Numa corda esticada temos a propagação de ondas transversais. Nas ondas transversais, o meio no qual a onda se propaga oscila na direção perpendicular à direção de propagação da onda. Se isolarmos para observação um elemento de corda, ele oscilará para cima e para baixo enquanto a onda se propagará horizontalmente.



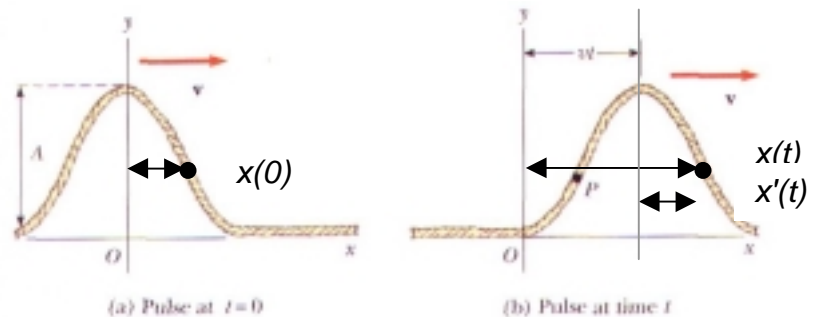
Por outro lado, se considerarmos uma mola, teremos a propagação de ondas longitudinais. Nas ondas longitudinais, o meio no qual a onda se propaga oscila na direção de propagação da onda.

Um exemplo típico de onda longitudinal é mostrado ao lado, onde pulsos periódicos estão sendo comunicados à uma mola



Ondas progressivas

Vamos considerar um pulso em forma de corcova se propagando em uma corda. No instante $t = 0$, o pulso tem o formato da esquerda e num instante t posterior o pulso manteve o mesmo formato, mas se moveu para a direita.



A função que descreve o formato da corda em $t = 0$ é dada por:

$$y(x,0) = f(x)$$

Num instante posterior t , a função que descreverá a forma da corda é dada por:

$$y(x,t) = f(x')$$

Se o pulso na corda move-se com velocidade com velocidade v , depois de um tempo t , todos os pontos da corcova mover-se-ão de uma distância vt .

Se estivermos observando um dado ponto específico da corcova, por exemplo onde ela tem metade do valor máximo. Em $t = 0$ esse ponto está distante de x da coordenada do ponto de máxima altura, mas num tempo t posterior ele estará distante x' do máximo, que se moveu de vt com toda a corcova. A relação entre essas grandezas é tal que:

$$x = x' + vt \quad \Rightarrow \quad x' = x - vt$$

Desse modo teremos que para uma onda progressiva que se move no sentido positivo do eixo x ,

$$y(x, t) = f(x - vt)$$

Uma onda progressiva, independente da sua forma, depende de x e t como mostrado na equação anterior.

Por outro lado, se tivéssemos uma onda progressiva viajando para a esquerda (quer dizer na direção negativa do eixo x), ela teria uma dependência funcional em x e t da forma:

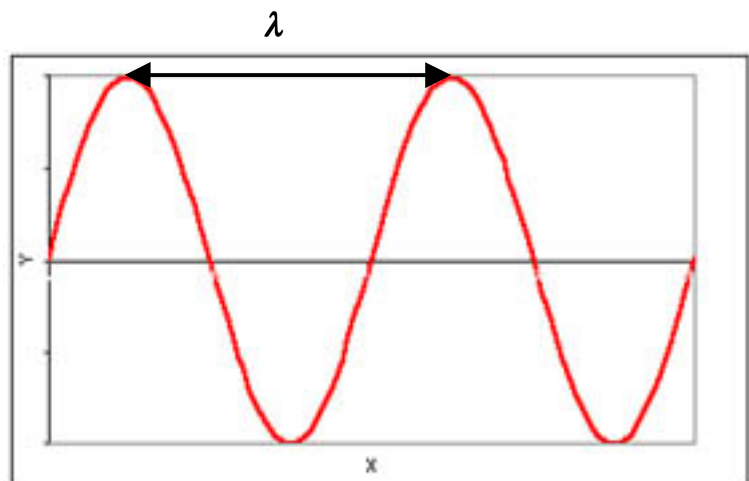
$$y(x, t) = g(x + vt)$$

Se tivéssemos ondas progressivas viajando nos dois sentidos, elas seriam representadas funcionalmente por:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

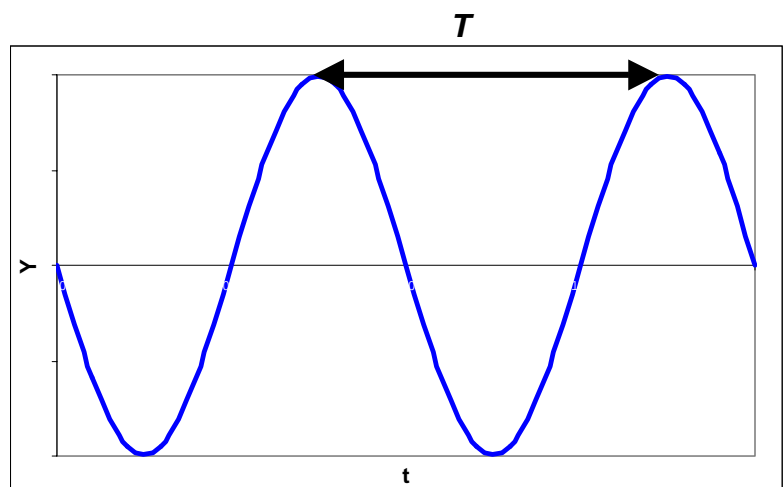
Comprimento de onda e frequência

Se estivermos observando a propagação de uma onda harmônica em uma corda, denominamos comprimento de onda λ distância entre dois pontos equivalentes consecutivos. Na figura ao lado consideramos o comprimento de onda como a distância entre dois máximos consecutivos.



Se estivermos observando um pequeno pedaço da corda enquanto uma onda harmônica se propaga, notaremos que esse elemento de corda irá se mover para cima e para baixo.

Se medirmos cada posição desse pedaço de corda à medida que o tempo evolui, ao desenhar o gráfico das posições desse pedaço versus o tempo encontraremos uma curva do tipo mostrado à esquerda.



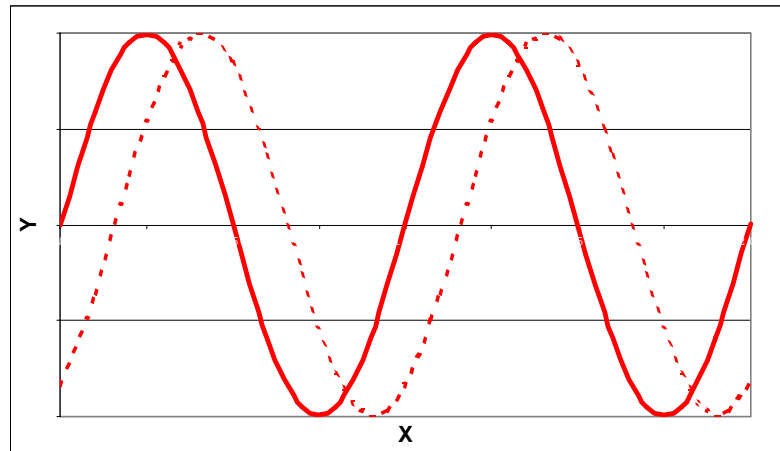
Denominamos período T o tempo entre dois pontos equivalentes consecutivos. Na figura ao lado consideramos o período como a distância entre dois máximos consecutivos.

Velocidade de propagação de uma onda

Um caso particular muito importante de onda progressiva tem a forma de uma senóide:

$$y(x,t) = y_M \text{sen}(kx - \omega t)$$

No instante $t = 0$ a função tem a forma da curva de traço contínuo e para um tempo posterior Δt a função tem a forma da curva tracejada.



Chamamos a grandeza k de número de onda (ou vetor de onda) e o definimos como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Chamamos ω de frequência angular e a definimos como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Chamamos de fase $\varphi(x,t)$ o argumento da senóide, ou seja:

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t$$

Um ponto de fase constante ocupa uma certa posição relativa na onda. Se marcarmos um certo ponto de máximo e passarmos a acompanhá-lo, iremos verificar que mesmo com a onda se movimentando à medida que o tempo evolui, a fase daquele máximo se mantém constante.

Assim, se quisermos calcular a velocidade com que uma onda se propaga devemos acompanhar um dado ponto dela, ou seja um ponto de fase constante:

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t = \text{constante}$$

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \therefore \lambda = vT$$

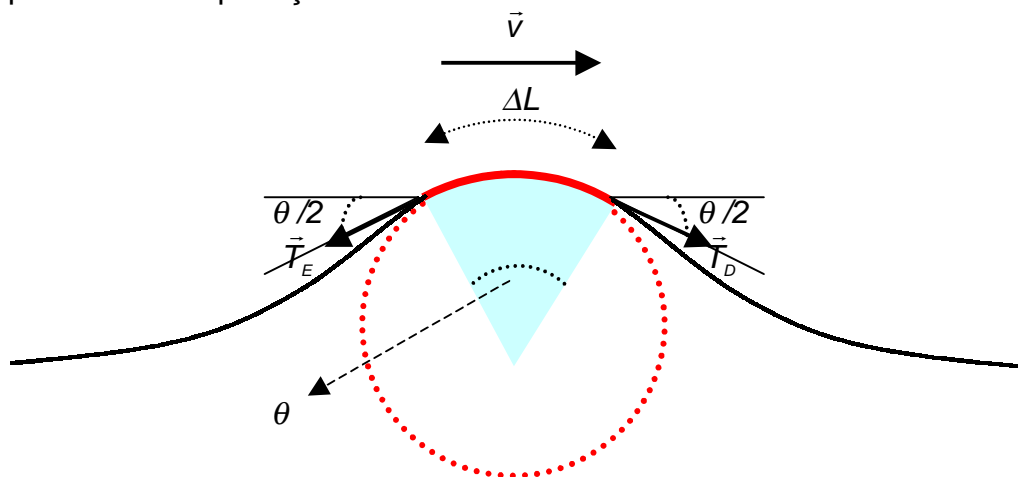
Velocidade de uma onda numa corda esticada

Para calcular a velocidade de uma onda em uma corda vamos considerar um pequeno pulso se propagando da esquerda para a direita em uma corda de densidade linear de massa μ e que é esticada através de uma tensão T aplicada nas suas extremidades. No sentido de facilitar a visualização apresentamos à seguir uma ampliação do pequeno pulso que se propaga.

Vamos analisar um pequeno pedaço de comprimento ΔL na parte superior do pulso. esse pedaço ΔL pode se considerado aproximadamente com o formato de um arco de círculo de raio R e definindo um pequeno ângulo θ .

A análise ficará adequada aos nossos propósitos se observarmos o movimento do pulso em um referencial que o acompanha com mesma velocidade. Neste referencial que se move com velocidade \vec{v} em relação aos suportes que prendem a corda, observamos a corda se mover e tomar a forma de pulso. Se observarmos apenas o pedaço de comprimento ΔL veremos que momentaneamente ele tem uma trajetória circular. Teremos a percepção de um pulso congelado e a corda escorregando através dele, como se existisse um tubo na forma de pulso e a corda escorregasse por dentro desse pulso.

Como as forças que atuam na corda não se alteram devido a essa mudança de referencial, temos que é nula a resultante horizontal das forças que atuam no pedaço de corda e é não nula a resultante vertical. E como no referencial que se move com velocidade \vec{v} o pedaço de corda descreve movimento circular, esta resultante vertical é a força centrípeta que atua neste pedaço de corda.



Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_D \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - T_E \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ T_D \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + T_E \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = F_R \end{array} \right.$$

Como a tensão da esquerda T_E é igual à tensão da direita T_D , ou seja: $T_E = T_D = T$ temos que:

$$2T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = F_R$$

Considerando que o ângulo é muito pequeno, temos que:

$$2T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cong 2T\left(\frac{\Delta L}{2R}\right) = T\left(\frac{\Delta L}{R}\right)$$

e por outro lado:

$$F_R = m \frac{v^2}{R}$$

logo:

$$T\left(\frac{\Delta L}{R}\right) = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{T}{m/\Delta L} = \frac{T}{\mu} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Energia e potência numa onda progressiva

Quando consideramos a propagação de uma onda progressiva em uma corda o movimento oscilatório de um elemento de corda será no sentido perpendicular à sua propagação. Levando em conta que o deslocamento de um elemento de corda que se encontra na posição x no instante t é dado por $y(x,t)$

$$y(x,t) = y_M \sin(kx - \omega t)$$

esse elemento de corda deslocar-se-á transversalmente com uma velocidade dada por $u(x,t)$:

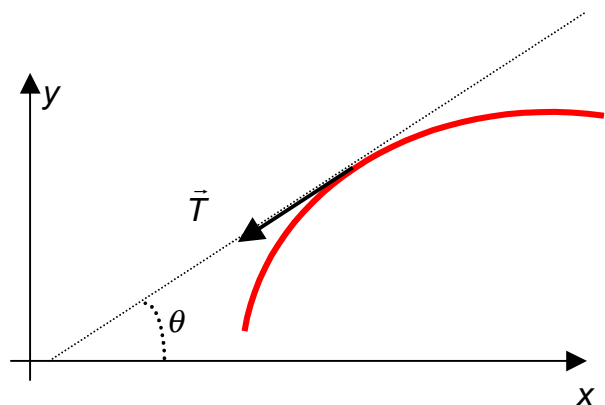
$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega y_M \cos(kx - \omega t)$$

Num dado instante a porção da corda à esquerda deste elemento de corda, exerce nele uma força transversal à direção de propagação dada por

$$F_y = -T \sin \theta$$

Considerando que os ângulos envolvidos serão muito pequenos, podemos aproximar

$$F_y = -T \tan \theta = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$



Portanto, a potência transmitida a um elemento de corda específico por seu vizinho da esquerda é dada pelo produto da força exercida pela velocidade desse elemento:

$$P(x,t) = F_y(x,t)u(x,t) = -T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -T[ky_M \cos(kx - \omega t)][-\omega y_M \cos(kx - \omega t)]$$

$$P(x,t) = \omega k T y_M^2 [\cos(kx - \omega t)]^2$$

Para uma análise global da propagação da onda na corda é interessante que saibamos qual o valor médio da potência comunicada por um elemento ao seu vizinho, e esse resultado é o fluxo de energia na corda por unidade de tempo.

Considerando que:

$$\langle [\cos(kx - wt)]^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt [\cos(kx - wt)]^2 = \frac{1}{2}$$

onde usamos que τ é o período da função, e desse modo:

$$\bar{P} = \langle P(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \mu v w^2 y_M^2$$

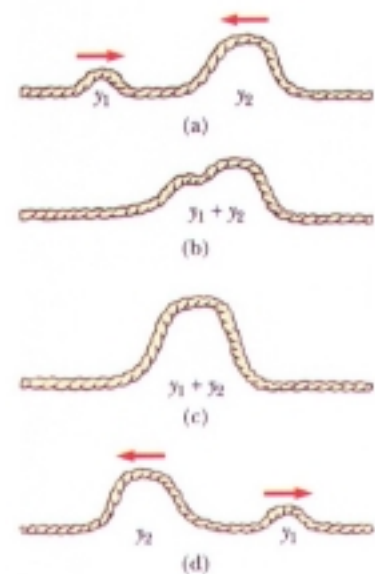
onde usamos que $T = \mu v^2$ e $w = kv$.

O Princípio da Superposição

Quando estamos ouvindo uma orquestra chegam simultaneamente aos nossos ouvidos os sons de todos os instrumentos que estão sendo tocados num dado instante. Isto significa que uma o mais ondas sonoras podem se propagar ao mesmo tempo numa dada região do espaço. O efeito global que percebemos será a soma dos efeitos que cada uma das ondas produziria se estivesse se propagando isoladamente.

Chamamos de princípio da superposição ao efeito global ser a soma dos efeitos isolados, como se depreende da figura ao lado que represente a interação entre duas ondas progressivas em uma corda.

Num dado instante as ondas viajam uma na direção da outra, produzem um efeito cumulativo ao se encontrar, e depois disso se afastam com o formato original.



Interferência - ondas no mesmo sentido

Vamos considerar o efeito da interação entre duas ondas que viajam no mesmo sentido. Para simplificar a análise, sem perder muito em generalidade, vamos considerar que essas ondas tenham mesma frequência, mesmo comprimento de onda, mesma amplitude, mas tenham uma defasagem. A primeira onda tem constante de fase nula e a segunda onda tem constante de fase φ . Elas têm a forma:

$$y_1(x, t) = y_M \text{sen}(kx - wt)$$

$$y_2(x, t) = y_M \text{sen}(kx - wt + \varphi)$$

Vamos usar a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

A onda resultante será a soma das duas ondas, ou seja:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

logo:

$$y(x, t) = \left[2y_M \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

A onda resultante tem uma amplitude modificada de acordo com o valor da diferença de fase entre as ondas formadoras. Alguns casos simples podem ser analisados facilmente:

a. $\varphi = 0$

$$y(x, t) = 2 y_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Esse é um exemplo de uma interferência construtiva, as ondas se somam de modo a alcançar a maior amplitude possível.

b. $\varphi = \pi$

$$y(x, t) = 0$$

Esse é um exemplo de uma interferência destrutiva, as ondas interagem e o resultado é a anulação de uma pela outra.

Interferência - ondas em sentido contrário

Vamos analisar o resultado da interação entre duas ondas que se propagam em sentidos contrários

$$y_1(x, t) = y_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_M \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Para simplificar a análise, sem perder muito em generalidade, vamos considerar que essas ondas tenham mesma frequência, mesmo comprimento de onda, mesma amplitude, e mesma constante de fase.

Novamente vamos usar a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

A onda resultante será a soma das duas ondas, ou seja:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

logo:

$$y(x,t) = [2 y_M \text{sen}(kx)] \cos(\omega t)$$

Esta não é uma onda progressiva, porque não depende de x e t na forma $(kx - \omega t)$ mas no entanto a corda oscila para cima e para baixo.

Existem alguns pontos na corda onde a amplitude é máxima, e eles são localizados quando kx assumem valores múltiplos ímpares de $\pi/2$. Ou seja:

$$kx = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

A partir do resultado anterior podemos encontrar os valores de x para os quais a amplitude é máxima. Esses pontos são chamados antinodos. Temos que $k = 2\pi/\lambda$, logo

$$x_N = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

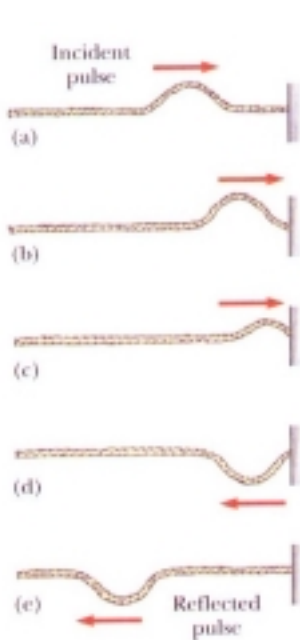
Por outro lado existem pontos onde a amplitude de oscilação é sempre nula, ou seja: a corda não se move. Esses pontos são localizados quando kx assume valores múltiplos de π .

$$kx = 0;\pi;2\pi;3\pi;\dots \Rightarrow kx = n\pi \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

A partir do resultado anterior podemos encontrar os valores de x para os quais a amplitude é nula. Esses pontos são chamados nós. Temos que $k = 2\pi/\lambda$, logo

$$x_N = n\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

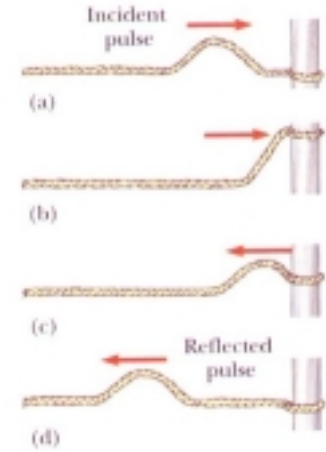
Reflexão de ondas na extremidade de uma corda



Uma corda pode ter a sua extremidade presa a um ponto fixo ou a uma presilha móvel.

Uma onda quando incide na extremidade de uma corda será refletida de um modo quando tem-se a extremidade fixa e de modo diverso quando a extremidade é móvel.

As duas situações podem ser vistas nas figuras vizinhas, e uma dedução desses resultados pode ser encontrada no **Vol 2 do Curso de Física Básica de H Moysés Nussenzveig**.



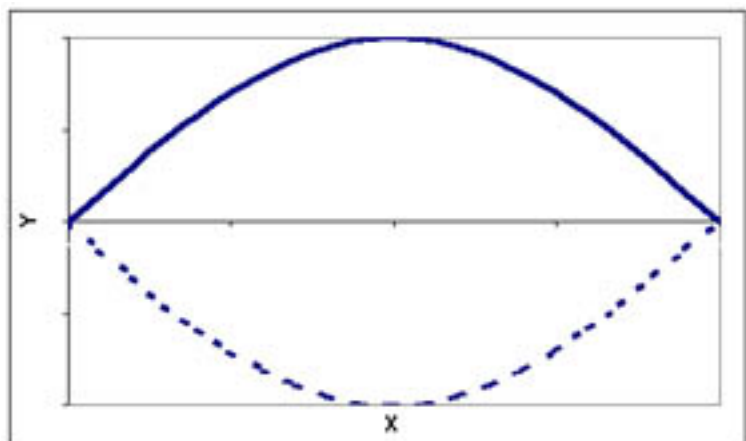
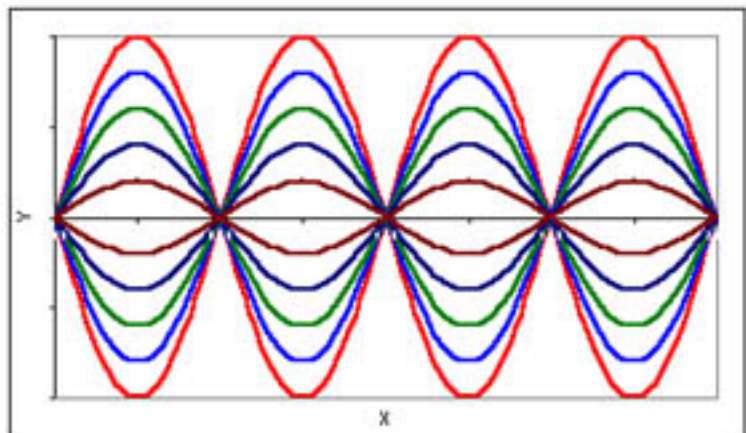
Ondas estacionárias e ressonância

Quando uma presa por ambas as extremidades é posta para vibrar em certa frequência as ondas se propagam nos dois sentidos formando um padrão de interferência, como já foi analisado anteriormente.

Para algumas frequências específicas a corda entra em ressonância, e acontecem as ondas estacionárias

Na primeira figura à direita temos uma onda estacionária com três nós intermediários. O nó é um ponto onde a corda não se movimenta. Obviamente, as extremidades são dois nós. Numa onda estacionária, essa situação define o primeiro padrão de oscilação, ou seja:

$$L = \lambda / 2$$



É um padrão de oscilação onde a onda estacionária tem meio comprimento de onda.

Num segundo padrão de oscilação temos um nó intermediário e desse modo:

$$L = \lambda$$

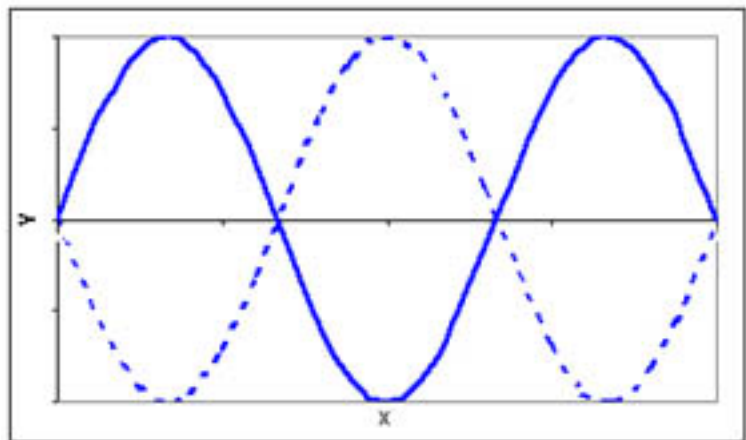
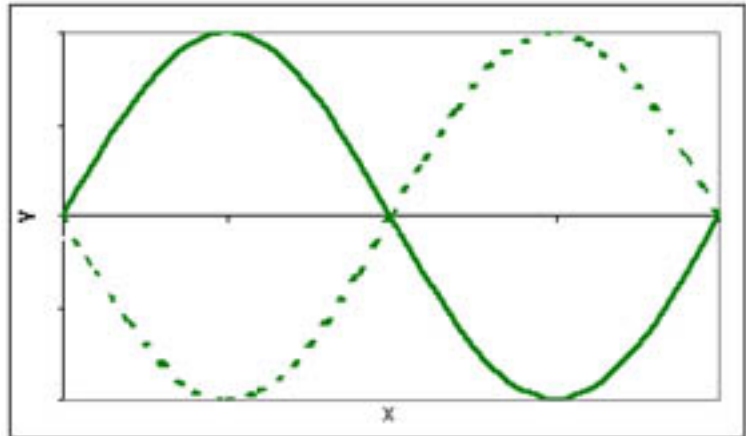
É um padrão de oscilação onde a onda estacionária tem um comprimento de onda.

Num terceiro padrão de oscilação temos dois nós intermediário e desse modo:

$$L = \lambda$$

É um padrão de oscilação onde a onda estacionária tem três meios comprimentos de onda.

$$L = 3 \lambda / 2$$



Podemos generalizar dizendo que a condição para existir um padrão de oscilação para uma onda estacionária é que:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Já mostramos anteriormente que:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Mas para uma corda presa pelas extremidades, apenas algumas frequências específicas podem desenvolver uma onda estacionária, portanto:

$$f_n = \frac{n}{2L} v \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Essas frequências específicas são chamadas frequências de ressonância, e como pode-se notar elas são múltiplas de uma certa frequência mais baixa ($n=1$). Chama-se a frequência mais baixa ($n=1$) de fundamental ou primeiro harmônico. O segundo harmônico corresponde a ($n=2$). Chama-se série harmônica o conjunto dos possíveis modos de oscilação, enquanto n é chamado de número harmônico.

Solução de alguns problemas

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

05 Mostre que $y(x,t) = y_M \text{sen}(k x - w t)$ pode ser reescrito nas seguintes formas alternativas:

a) $y(x,t) = y_M \text{sen}[k (x - v t)]$

$$kx - wt = k \left(x - \frac{w}{k} t \right) = k(x - vt)$$

b) $y(x,t) = y_M \text{sen}[2\pi (x / \lambda - f t)]$

$$kx - wt = \frac{2\pi}{\lambda} x - 2\pi f t = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - f t \right)$$

c) $y(x,t) = y_M \text{sen}[w (x / v - t)]$

$$kx - wt = \frac{w}{v} x - wt = w \left(\frac{x}{v} - t \right)$$

d) $y(x,t) = y_M \text{sen}[2\pi [x / \lambda - t / T]]$

$$kx - wt = \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“09” Um pulso isolado, cuja forma de onda é dado pela função $h(x - 5 t)$ é mostrado na figura à seguir para $t = 0$, onde x é dado em centímetros e t é dado em segundos.

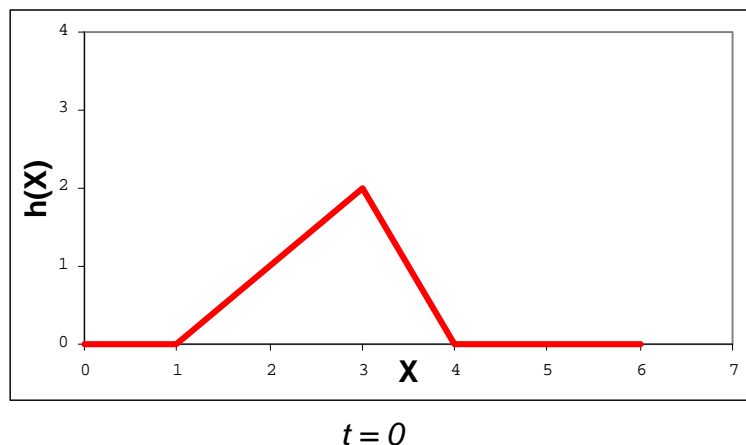
a) Qual a velocidade de propagação deste pulso?

Um ponto com fase constante na onda é definido por:

$$\varphi(x,t) = x - 5 t = cte$$

A velocidade desse ponto é a velocidade da onda, logo:

$$v = \frac{dx}{dt} = +5 \text{ cm/s}$$

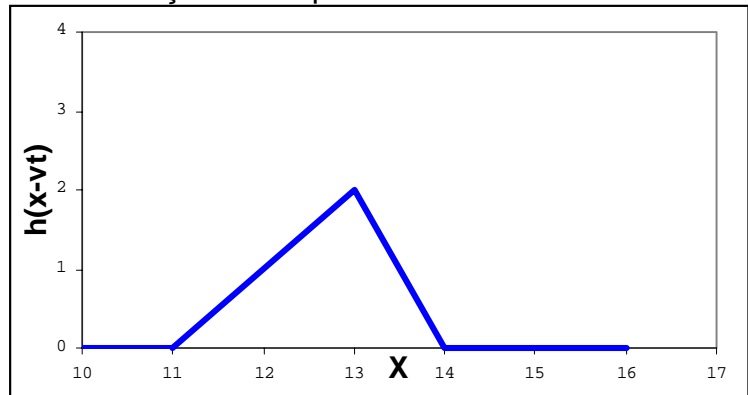


- b) Qual o sentido de propagação deste pulso?

O sentido positivo do eixo x .

- c) Trace o gráfico $h(x - 5t)$ como uma função de x para $t = 2s$.

Como é uma onda progressiva em um meio não dispersivo e sem atenuação, a forma da onda manter-se-á a mesma. Assim, basta calcular onde um ponto do pulso vai estar. Vamos escolher o ponto mais à esquerda da onda que se encontra na posição inicial $L_I = 1cm$.



$t = 5s$

No intervalo de tempo $\Delta t = 2s$ esse ponto move-se de ΔL , onde

$$\Delta L = v \Delta t = 5 \cdot 2 = 10cm$$

A posição final L_F desse ponto será:

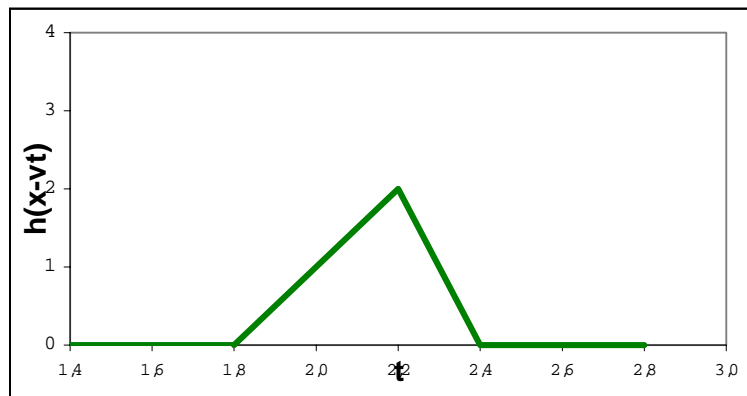
$$L_F = L_I + \Delta L = 1 + 10 = 11cm$$

- d) Trace o gráfico $h(x - 5t)$ como uma função de t para $x = 10cm$.

Seja t_E o tempo necessário para que a parte da esquerda do pulso alcance o ponto $x = 10cm$. O máximo do pulso já passou por esse ponto um tempo Δt_M anterior e a parte da direita do pulso já passou um tempo Δt_D .

Temos três tempos característicos t_E ;

$t_M = t_E + \Delta t_M$ e $t_D = t_E + \Delta t_D$.



$x = 10cm$

$$t_E = \frac{d_E}{v} = \frac{10 - 1}{5} = 1,8s$$

$$\Delta t_M = \frac{\Delta x_M}{v} = \frac{3 - 1}{5} = 0,4s \Rightarrow t_M = t_E + \Delta t_M = 2,2s$$

$$\Delta t_D = \frac{\Delta x_D}{v} = \frac{4 - 1}{5} = 0,6s \Rightarrow t_D = t_E + \Delta t_D = 2,4s$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“11” A equação de uma onda transversal se propagando em uma corda é dada por:

$$y(x,t) = (2,0\text{mm}) \text{sen}[(20\text{m}^{-1})x - (600\text{s}^{-1})t]$$

a) Ache a amplitude, frequência, velocidade e comprimento de onda.

$$y_M = 2,0\text{mm}$$

$$w = 600\text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad f = w/2\pi = 95,5\text{Hz}$$

$$k = 20\text{rad/m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\pi/k = 0,31\text{m}$$

$$v = w/k = 30\text{m/s}$$

b) Ache a velocidade escalar máxima de uma partícula da corda.

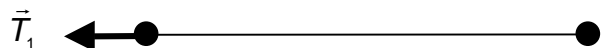
$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = (-600\text{s}^{-1})(2,0\text{mm})\text{cos}[(20\text{m}^{-1})x - (600\text{s}^{-1})t]$$

$$u_M = 1200\text{mm/s} = 1,2\text{m/s}$$

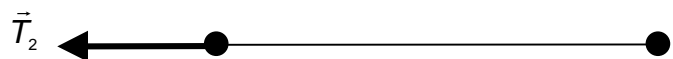
Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

12 A tensão num fio preso em ambos os extremos é duplicada sem que haja qualquer mudança considerável em seu comprimento. Qual é a razão entre as velocidades das ondas transversais nesse fio, antes e depois do aumento de tensão?

$$T_F = 2 T_I$$



A velocidade de propagação de uma onda numa fio é dada por:



$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\frac{v_I}{v_F} = \sqrt{\frac{T_I}{T_F}} \sqrt{\frac{\mu_F}{\mu_I}}$$

Como o fio não foi alterado, não aconteceu mudança nas densidades de massa, logo:

$$\frac{v_I}{v_F} = \sqrt{\frac{T_I}{T_F}} = \sqrt{\frac{T_I}{2T_I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad v_F = v_I \sqrt{2} = 1,414v_I$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

13 A densidade linear de uma corda vibrante é $1,6 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$. Uma onda transversal se propaga na corda e é descrita pela seguinte equação:

$$y(x,t) = (0,021 \text{ m}) \text{ sen}[(2,0 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t]$$

a) Qual é a velocidade da onda?

$$v = w/k = 15 \text{ m/s}$$

$$\mu = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$$

$$w = 30 \text{ rad/s}$$

$$k = 2 \text{ rad/m}$$

b) Qual é a tensão na corda?

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2$$

$$T = 0,036 \text{ N}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“15” Prove que, se uma onda transversal está se propagando ao longo de uma corda, então a inclinação de qualquer ponto da corda é numericamente igual à razão entre a velocidade escalar da partícula e a velocidade da onda naquele ponto

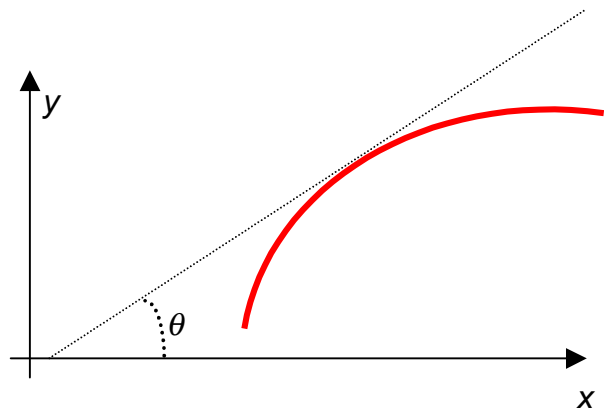
$$y(x,t) = y_M \text{ sen}(kx - wt)$$

$$v = \text{velocidade da onda}$$

$$v = w/k$$

$$u(x,t) = \text{velocidade de um elemento de corda}$$

$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -w y_M \cos(kx - wt)$$



$\tan \theta = \text{inclinação da corda}$

$$\tan \theta = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = k y_M \cos(kx - wt)$$

$$\tan \theta = \frac{k}{w} |u(x,t)| = \frac{|u(x,t)|}{v}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

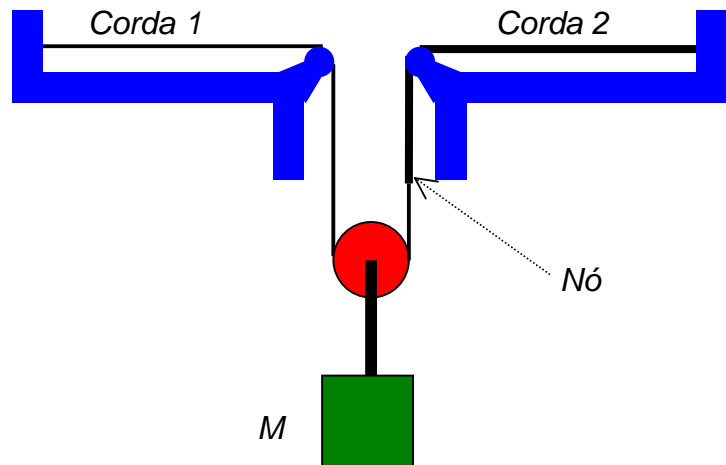
20 Na figura à seguir a corda 1 tem uma densidade linear $\mu_1 = 3,0 \text{ g/m}$ e a corda 2 tem uma densidade linear $\mu_2 = 5,0 \text{ g/m}$. Elas estão sob tensão devido a um bloco suspenso de massa $M = 500 \text{ g}$.

- a) Calcule a velocidade da onda em cada corda.

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 3,0\text{g/m} \\ \mu_2 &= 5,0\text{g/m} \\ M &= 500\text{g}\end{aligned}$$

As tensões T_1 e T_2 que distendem as cordas são iguais porque as cordas estão conectadas e esticadas pela ação da massa M . Dito de outra forma:

$$T_1 = T_2 = \frac{Mg}{2}$$



Estamos aptos a calcular as velocidades de propagação de uma onda em cada uma das cordas:

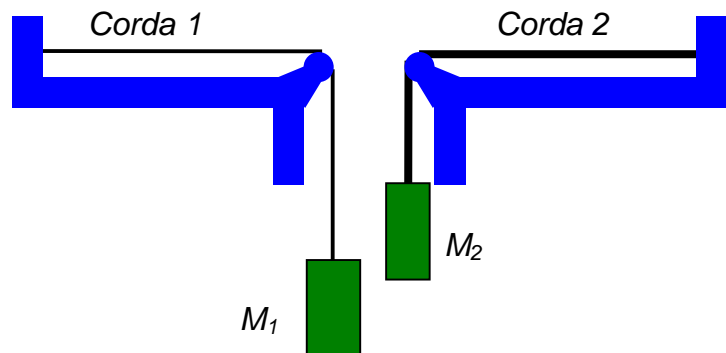
$$v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} = 28,57\text{m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}} = 22,13\text{m/s}$$

- b) O bloco agora é dividido em dois (com massas $M_1 + M_2 = M$), de acordo com a configuração a seguir. Determine as massas M_1 e M_2 para que as velocidades de uma onda nas duas cordas sejam iguais.

$$v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{M_1 g}{\mu_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{M_2 g}{\mu_2}}$$



Como $v_1 = v_2$, temos:

$$\frac{M_1}{\mu_1} = \frac{M_2}{\mu_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{3}{5} \therefore M_1 = \frac{3}{5} M_2$$

Mas $M_1 + M_2 = M = 500\text{g}$, logo

$$M_1 = 187,5\text{g} \quad \text{e} \quad M_2 = 312,5\text{g}$$

- a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de y , a distância até a extremidade mais baixa, e é dada por $v = \sqrt{gy}$.

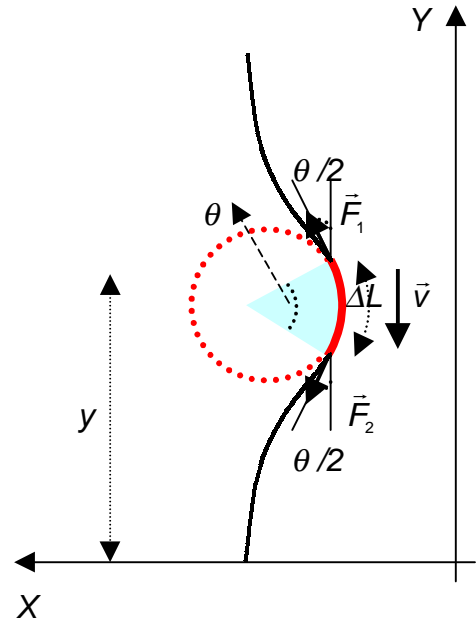
Vamos considerar um elemento de corda de comprimento ΔL .

Existem duas forças atuando nesse elemento: o pedaço acima puxa o elemento com uma força F_1 , que é uma reação à força peso do elemento de corda mais o pedaço abaixo. A segunda força F_2 é o peso de pedaço abaixo do elemento de corda. Seja F a resultante das forças que atuam no elemento de corda:

$$\begin{cases} F_x = F_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ F_y = F_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - F_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_1 = \mu(y + \Delta L)g \\ F_2 = \mu y g \end{cases} \quad e \quad \mu = \frac{m}{L}$$



Por outro lado, vamos considerar que a onda tenha uma amplitude pequena comparada com o seu comprimento, de modo que o ângulo possa ser considerado pequeno:

$$\theta = \frac{\Delta L}{R} \quad ; \quad \text{se } \theta \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cong \frac{\theta}{2} = \frac{\Delta L}{2R} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cong 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = (F_1 + F_2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = (2\mu g y + \mu g \Delta L) \frac{\Delta L}{2R} = \frac{\mu g y}{R} \Delta L + \frac{\mu g}{2R} (\Delta L)^2 \\ F_y = (F_1 - F_2) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = F_1 - F_2 \end{cases}$$

Considerando que se $\Delta L \ll 1$ teremos que $\Delta L \gg (\Delta L)^2$, então teremos que:

$$\begin{cases} F_x \cong \frac{\mu g y}{R} \Delta L \\ F_y \cong 0 \end{cases} \Rightarrow F_R = F_x = \left(\frac{\mu g \Delta L}{R} \right) y$$

No entanto, em um referencial que esteja se movimentando com a mesma velocidade do pulso, o elemento de corda tem movimento circular com aceleração centrípeta dada por:

$$F_R = (\mu \Delta L) \frac{v^2}{R}$$

e desse modo encontramos que:

$$F_R = (\mu \Delta L) \frac{v^2}{R} = \left(\frac{\mu g \Delta L}{R} \right) y \quad \therefore v = \sqrt{g y}$$

- b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para percorrer o comprimento da corda é dado por $t = 2\sqrt{L/g}$.

$$v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{g y} \Rightarrow dt = \frac{dy}{\sqrt{g y}} \quad \therefore \int_0^t dt' = \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{g y}}$$

$$t = g^{-\frac{1}{2}} \int_0^L y^{-\frac{1}{2}} dy = 2g^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 27 Duas ondas idênticas que se propagam, deslocando-se no mesmo sentido, têm uma diferença de fase de $\pi/2 \text{ rad}$. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum y_M das duas ondas?

$$y_1(x, t) = y_M \text{sen}(kx - wt)$$

$$y_2(x, t) = y_M \text{sen}(kx - wt + \pi/2)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) = y_M [\text{sen}(kx - wt) + \text{sen}(kx - wt + \pi/2)]$$

Mas:

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

logo:

$$\text{sen } \alpha + \text{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \text{sen} \left(\frac{2\alpha + \pi/2}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

e portanto

$$y(x, t) = \left[2y_M \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

A amplitude A desta onda resultante é dada por:

$$A = 2y_M \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_M \sqrt{2} \Rightarrow \frac{A}{y_M} = \sqrt{2}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

32 Uma corda sob tensão T_I , oscila no terceiro harmônico com uma frequência f_3 , e as ondas na corda têm comprimento de onda λ_3 . Se a tensão for aumentada para $T_F = 4T_I$ e a corda for novamente levada a oscilar no terceiro harmônico,

a) qual será a frequência de oscilação em termos de f_3 ?

$$\left\{ \begin{array}{l} v_I = \sqrt{\frac{T_I}{\mu}} \\ v_F = \sqrt{\frac{T_F}{\mu}} = \sqrt{\frac{4T_I}{\mu}} \quad \therefore \quad v_F = 2v_I \end{array} \right.$$

$$L = n \frac{\lambda_N}{2} \Rightarrow \lambda_N = \frac{2L}{n}$$

$$f_N = \frac{v}{\lambda_N} = \frac{n}{2L} v \Rightarrow f_N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3^I = \frac{3}{2L} v_I \\ f_3^F = \frac{3}{2L} v_F \end{array} \right. \Rightarrow \frac{f_3^I}{f_3^F} = \frac{\frac{3v_I}{2L}}{\frac{3v_F}{2L}} = \frac{v_I}{v_F} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad f_3^F = 2f_3^I$$

b) qual será o comprimento de onda em termos de λ_3 ?

$$\lambda_3 = \frac{v}{f_3} \Rightarrow \frac{\lambda_3^I}{\lambda_3^F} = \left(\frac{v_I}{f_3^I} \right) \left(\frac{f_3^F}{v_F} \right) = \frac{v_I}{v_F} \frac{f_3^F}{f_3^I} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \therefore \quad \lambda_3^F = \lambda_3^I$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

34 Duas ondas senoidais com amplitudes e comprimentos de onda idênticos se propagam em sentidos contrários ao longo de uma corda, com velocidade escalar de 10cm/s . Se o intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é $0,50\text{s}$, quais os seus comprimentos de onda?

$$y_1(x,t) = y_M \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_M \text{sen}(kx + \omega t)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_M [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)]$$

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$y(x,t) = 2 y_M \text{sen}(kx) \cos(\omega t)$$

O intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é igual à meio período, logo:

$$\Delta t = T/2 = 0,50\text{s} \quad \Rightarrow \quad T = 1\text{s}$$

$$v = 10\text{cm/s} = 0,1\text{m/s}$$

$$\lambda = v T = (0,1) (1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,1\text{m}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

35 Uma corda fixada em ambas as pontas tem $8,40\text{m}$ de comprimento, com uma massa de $0,120\text{kg}$. Ela está submetida a uma tensão de 96N e é colocada em oscilação.

a) Qual a velocidade escalar das ondas na corda?

$$\mu = \frac{M}{L} \qquad L = 8,4\text{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{LT}{M}} \qquad M = 0,120\text{kg}$$

$$v = 81,97\text{m/s} \qquad T = 96\text{N}$$

b) Qual o mais longo comprimento de onda possível para uma onda estacionária?

$$L = \lambda_{\text{Max}}/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{Max}} = 2 L \quad \therefore \quad \lambda_{\text{Max}} = 16,8\text{m}$$

c) Dê a frequência dessa onda.

$$f = v / \lambda_{\text{Max}} \quad \Rightarrow \quad f = 4,87\text{Hz}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

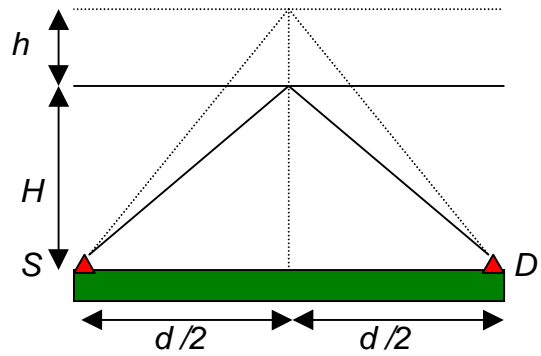
“38” Uma fonte S e um detetor de ondas de rádio D estão localizados ao nível do solo a uma distância d , conforme a figura a seguir. Ondas de rádio de comprimento λ chegam a D , pelo caminho direto ou por reflexão numa certa camada da atmosfera. Quando a camada está numa altura H , as duas ondas chegam em D exatamente em fase. À medida que a camada sobe, a diferença de fase entre as duas ondas muda, gradualmente, até estarem exatamente fora de fase para uma altura de camada $H + h$. Expresse o comprimento de onda λ em termos de d , h e H .

Vamos definir as grandezas:

d_1 = distância entre a fonte e o receptor.

d_2 = distância percorrida pelo som ao ser refletido numa altura H .

d_3 = distância percorrida pelo som ao ser refletido numa altura $H + h$.



Desse modo temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \\ d_2 = 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4H^2 + d^2} \\ d_3 = 2\sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4(H+h)^2 + d^2} \end{array} \right.$$

$$\Delta d_1 = d_2 - d_1 = n \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Interferência construtiva}$$

$$\Delta d_2 = d_3 - d_1 = (n + 1/2) \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Interferência destrutiva}$$

$$\Delta d_2 - \Delta d_1 = \lambda/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 (\Delta d_2 - \Delta d_1)$$

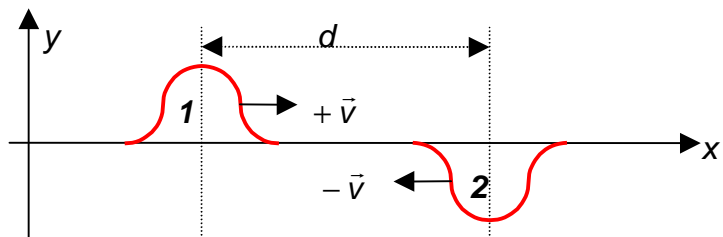
$$\lambda = 2\sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - 2\sqrt{4H^2 + d^2}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

40 Dois pulsos se propagam ao longo de uma corda em sentidos opostos, como na figura à seguir.

- a) Se a velocidade da onda $v = 2,0\text{m/s}$ e os pulsos estão a uma distância de $6,0\text{cm}$ em $t = 0$, esboce os padrões resultantes para $t = 5$; 10 ; 15 e 20ms .

Vamos chamar de $x_1(t)$ a localização do máximo do pulso 1, $x_2(t)$ a localização do máximo do pulso 2, e $D(t)$ a separação entre os máximos.



Inicialmente os pulsos estão localizados nas posições x_{01} e x_{02} respectivamente, e eles se movem com velocidade v , logo

$$x_1(t) = x_{01} + vt$$

e

$$x_2(t) = x_{02} - vt$$

portanto

$$D(t) = |x_2(t) - x_1(t)|$$

e

$$D(0) = |x_{01} - x_{02}| = d = 6,0\text{cm}$$

Podemos dizer que:

$$D(t) = |(x_{01} - x_{02})| - 2vt = d - 2vt$$

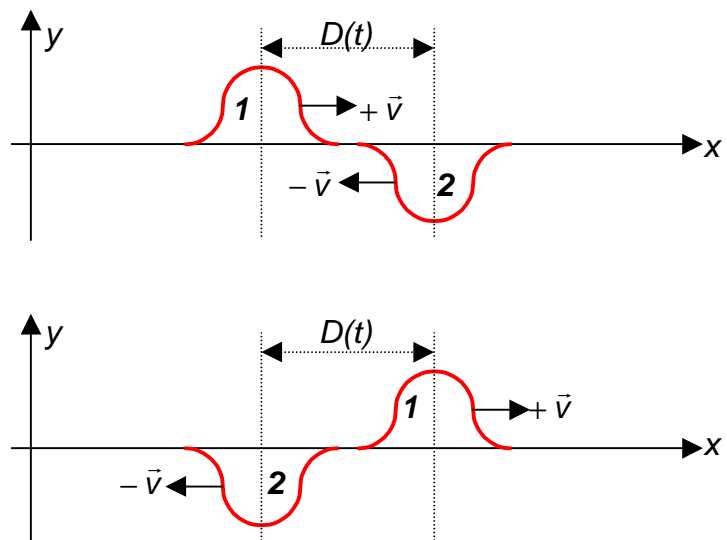
Os pulsos terão seus máximos no mesmo ponto quando $D(t_E) = 0$, ou seja:

$$d - 2vt_E = 0 \Rightarrow t_E = d/2v = 0,015\text{s} = 15\text{ms}$$

Para $t < t_E$ os dois pulsos estão se aproximando um do outro.

Quando $t = t_E$ os máximos dos pulsos estão na mesma posição e tem lugar uma interferência destrutiva. Neste instante a corda tem a forma de uma linha reta.

Quando $t > t_E$ os dois pulsos estão se afastando um do outro.



b) O que aconteceu com a energia em $t = 15\text{ms}$?

Neste instante a corda tem a forma de uma linha reta e aparentemente não existem pulsos na corda. Mas é como se a energia dos pulsos estivesse armazenada em forma de energia potencial.