Versão preliminar
18 de junho de 2004

Notas de Aula de Física

16. Oscilações

Quando o movimento de um corpo descreve uma trajetória, e a partir de um certo instante começa a repetir esta trajetória, dizemos que esse movimento é periódico. O tempo que o corpo gasta para voltar a percorrer os mesmos pontos da trajetória é chamado de período.

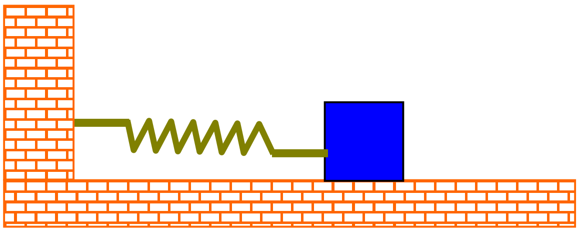
No nosso cotidiano existem inúmeros exemplos de movimento periódico, tais como o pêndulo de um relógio ou um sistema massa - mola, quando um desses conjuntos descrevem um vai e vem em torno das suas posições de equilíbrio.

O movimento harmônico simples - MHS

O movimento harmônico simples - MHS é movimento periódico, e portanto o objeto passa novamente por uma dada posição depois de um período T . O período é o inverso da a frequência f de oscilação:

$$T = \frac{1}{f}$$

Um exemplo típico de aparato que se movimenta segundo um MHS é sistema massa-mola. Uma mola tem uma de suas extremidades presa em uma parede rígida e a outra extremidade está presa em um corpo que está sobre um superfície sem atrito. Quando deslocado de sua posição de equilíbrio o corpo começa a oscilar.



Um objeto que se desloca em MHS tem a sua posição descrita pela equação

$$x(t) = x_M \cos(wt + \varphi)$$

onde

x_M = *amplitude de oscilação*
w = *frequência angular de oscilação*
$(wt + \varphi)$ = *fase*
φ = *constante de fase*

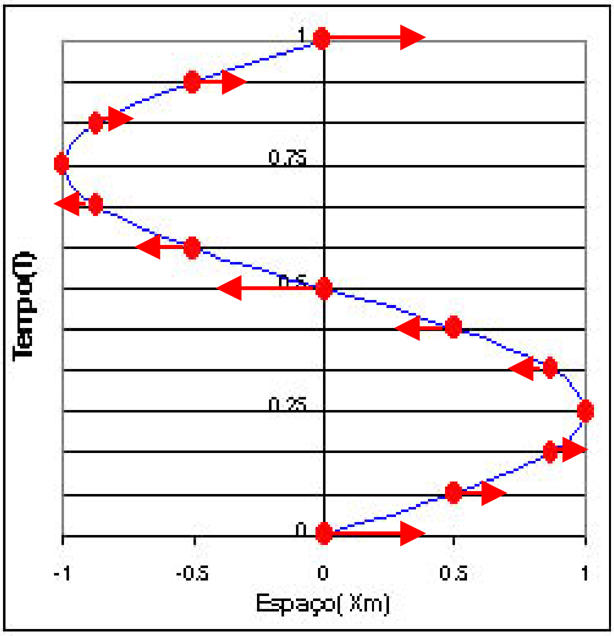
Quando a constante de fase assume o valor $\varphi = -\pi/2$ a equação anterior, que descreve o movimento do corpo, tem a forma:

$$x(t) = x_M \, sen \, wt$$

À medida que o tempo evolui, o corpo ocupa as diversas posições mostradas na figura à seguir.

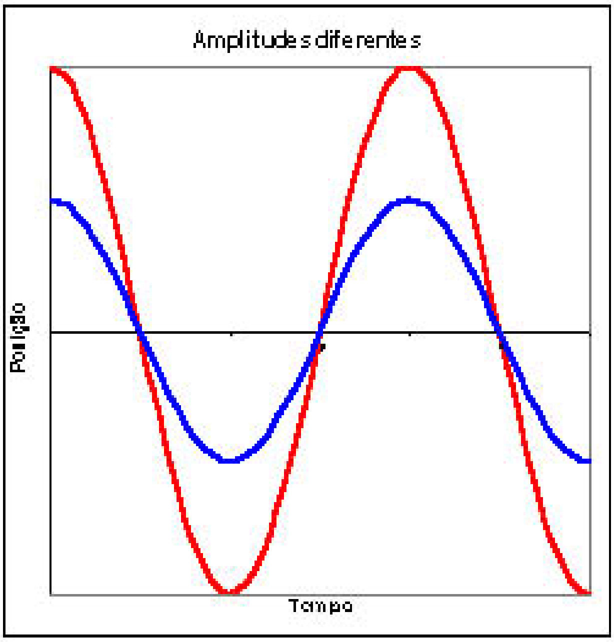
Em cada posição ocupada, o corpo terá uma velocidade correspondente, como veremos mais adiante.

Também em cada posição, ele terá uma aceleração correspondente. Tanto a aceleração quanto a velocidade variam à medida que a posição se altera.



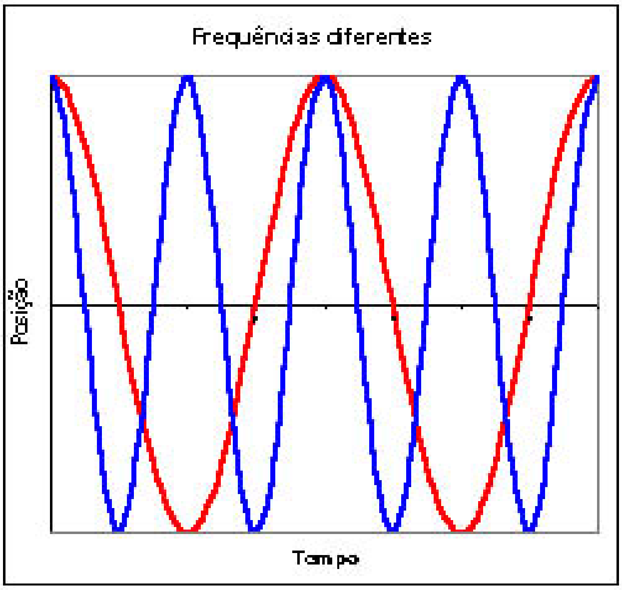
O gráfico da posição em função do tempo toma diversas formas quando modificamos a amplitude, frequência ou constante de fase.

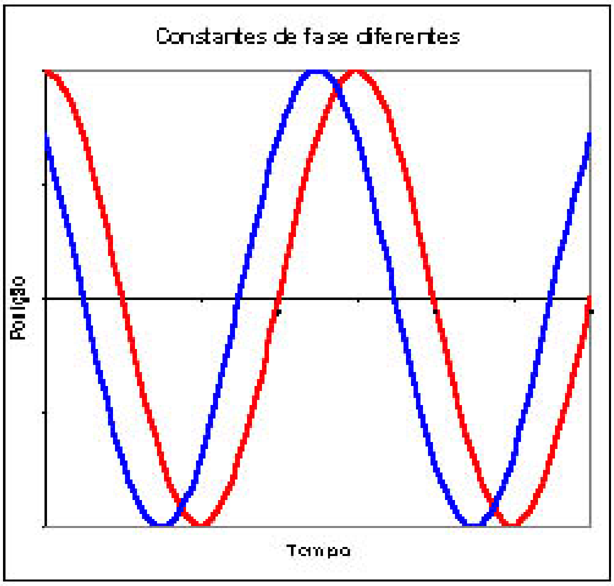
Quando alteramos a ***amplitude*** de oscilação, o movimento se consuma para deslocamentos máximos diferentes, mas com mesma frequência e mesma constante de fase. Desse modo os dois movimentos alcançam os extremos no mesmo instante.



Quando aumentamos a ***frequência*** (e consequentemente diminuímos o período), os movimentos terão a forma descrita a seguir onde a função de maior período é a vermelha e a de menor período é azul.

Quando variamos a constante de fase, a função mantém a forma, mas sofre um deslocamento, como é mostrado a seguir.





Como o movimento é periódico, teremos que as posições se repetem depois de um tempo igual ao período T , ou seja:

$$x(t) = x(t + T)$$

e portanto:

$$x(t + T) = x_M \cos[w(t + T) + \varphi] = x(t) = x_M \cos[(wt + \varphi) + wT]$$

logo:

$$wT = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w = \dfrac{2\pi}{T} \\ w = 2\pi\, f \end{cases}$$

MHS - A velocidade

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -wx_M \operatorname{sen}(wt + \varphi)$$

Definindo a amplitude da velocidade $v_M = w\, x_M$, encontramos que:

$$v(t) = -v_M \operatorname{sen}(wt + \varphi)$$

MHS - A aceleração

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -w\, v_M \cos(wt + \varphi)$$

Definindo a amplitude da aceleração $a_M = w\, v_M = w^2\, x_M$, encontramos que:

$$a(t) = -a_M \cos(wt + \varphi)$$

ou ainda

$$a(t) = -w^2 x(t)$$

MHS - A Lei da força

Considerando um sistema massa - mola que obedeça à Lei de Hooke e supondo que a resultante das forças que atuam na massa é a força restauradora da mola, encontramos que:

$$F = ma = -mw^2 x$$

Mas

$$F = -k\,x$$

logo

$$k = mw^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$$

MHS - Considerações sobre energia

A energia potencial elástica de um sistema massa - mola é definido como:

$$U(t) = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,x_M^2 \cos^2(wt + \varphi)$$

e a energia potencial desse sistema é definida como:

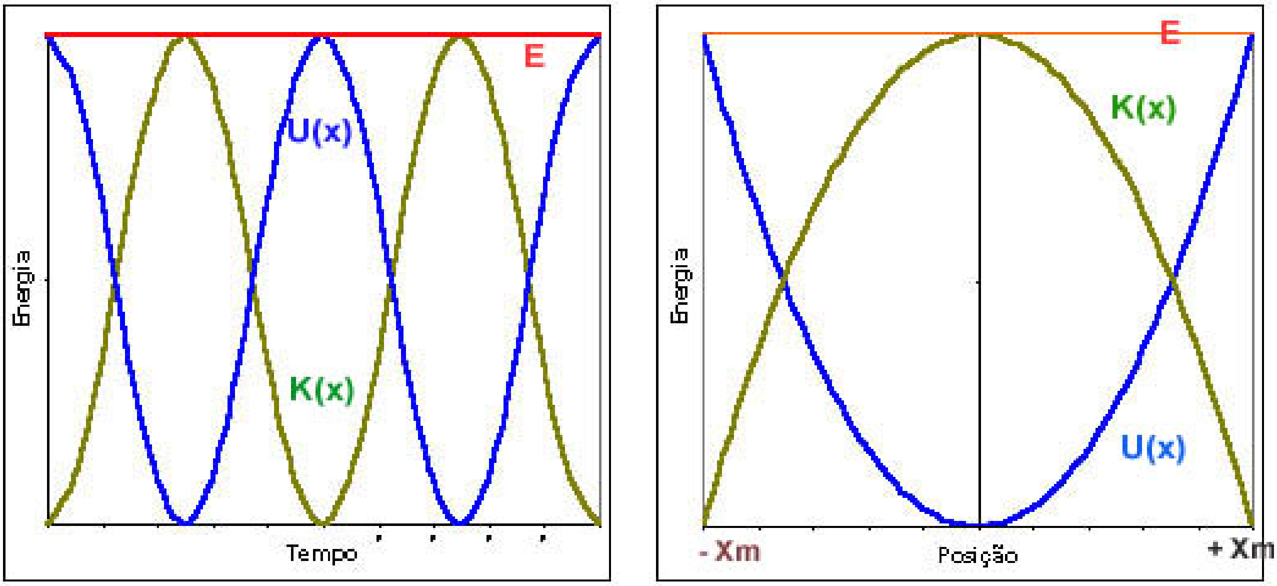
$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-w\,x_M \operatorname{sen}(wt + \varphi)]^2$$

Se considerarmos que $m\,w^2 = k$, encontramos que:

$$K(t) = \frac{1}{2}k\,x_M^2 \operatorname{sen}^2(wt + \varphi)$$

A energia mecânica E, definida como a soma das energias cinética K e potencial U, terá a forma:

$$E = U + K = \frac{1}{2}k\,x_M^2 = constante$$



A equação para o MHS

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ou seja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

ou ainda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0 \qquad onde \qquad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução mais geral da equação anterior tem a forma:

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

onde A e α são constantes a determinar. Usando a solução, encontramos:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t} \end{cases}$$

Aplicando estes resultados na equação do MHS, temos que:

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + w^2 Ae^{\alpha t} = 0$$

ou ainda:

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha^2 + w^2\right) = 0$$

Como A e α são diferentes de zero, em princípio, a única forma da equação acima se anular será quando:

$$\alpha^2 + w^2 = 0 \quad \therefore \quad \alpha^2 = -w^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm i\,w$$

A solução da equação do MHS toma, então, a forma:

$$x(t) = A_1 e^{+i\alpha t} + A_2 e^{-i\alpha t}$$

A solução da equação do MHS poderá tomar outra forma se redefinirmos as constantes A_1 e A_2, da seguinte forma:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2} x_M e^{+i\varphi} \\ \\ A_2 = \dfrac{1}{2} x_M e^{-i\varphi} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} x_M e^{+i(wt+\varphi)} + \frac{1}{2} x_M e^{-i(wt+\varphi)}$$

Considerando a fórmula de De Moivre:

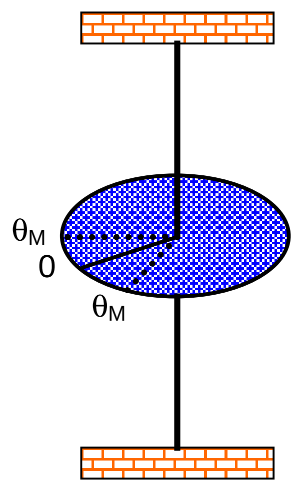
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{+i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

temos que:

$$x(t) = x_M \cos(wt + \varphi)$$

Um oscilador harmônico simples angular - O pêndulo de torção

Vamos considerar um disco preso a um fio que passa pelo seu centro e perpendicular à sua superfície, como mostra a figura ao lado.



Se giramos o disco à partir de sua posição de equilíbrio $(\theta = 0)$ e depois soltarmos, ele irá oscilar em torno daquela posição em Movimento Harmônico Simples - MHS entre os ângulos $(\theta = -\theta_M)$ e $(\theta = +\theta_M)$

Rodando o disco de um ângulo θ em qualquer direção, faremos surgir um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa\,\theta$$

onde kapa (κ) é a constante de torção.

Como a força restauradora é a única que atua no plano do disco, ela provocará o torque resultante:

$$\tau = I\,\alpha$$

onde I é o momento de inércia do disco e α é a sua aceleração angular. Desse modo, temos que:

$$\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

ou seja:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta = 0$$

A equação anterior define a frequência angular de oscilação do pêndulo de torção:

$$w = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

e tem como solução:

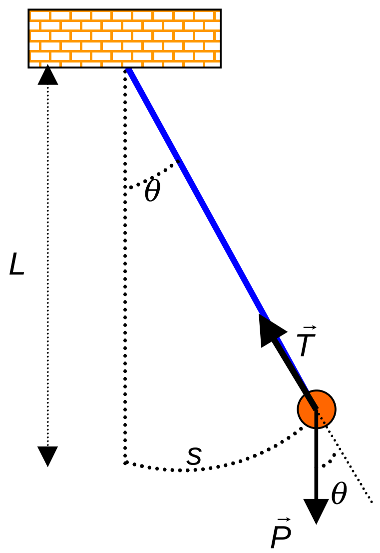
$$\theta(t) = \theta_M \cos(wt + \delta)$$

Pêndulos

Os pêndulos fazem parte de uma classe de osciladores harmônicos simples nos quais a força restauradora está associada à gravidade, ao invés das propriedades elásticas de um fio torcido ou de uma mola comprimida.

O pêndulo simples

O pêndulo simples é composto de um corpo suspenso através de um fio de massa desprezível, e ele é posto a oscilar em torno de sua posição de equilíbrio. No seu movimento a corpo descreve um arco de circunferência.



A componente do peso, tangencial ao deslocamento é a força de restauração desse movimento, porque age no corpo de modo a trazê-lo de volta à sua posição central de equilíbrio.

A componente do peso, perpendicular ao deslocamento é equilibrada pela tração exercida pelo fio, de modo que a resultante das forças tem a forma:

$$F = -mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

onde s é o deslocamento medido ao longo do arco que descreve a oscilação, e o sinal negativo indica que a força age na direção da posição de equilíbrio - como no caso do sistema massa - mola. O arco s é definido como

$$s = L\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

temos que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)\text{sen}\,\theta = 0$$

Para pequenas oscilações do pêndulo, podemos aproximar $sen\theta \approx \theta$, e teremos então:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

A equação anterior define a frequência angular de oscilação do pêndulo simples:

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

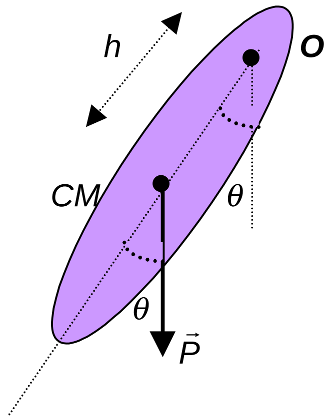
e tem como solução:

$$\theta(t) = \theta_M \cos(wt + \delta)$$

O pêndulo físico

A maior parte dos pêndulos do mundo real não é nem ao menos aproximadamente simples.

Vamos considerar um objeto de forma arbitrária, que pode oscilar em torno de um eixo que passa pelo ponto ***O*** , perpendicular à folha de papel. O eixo está a uma distância h do centro de massa, onde atua a força peso.



Quando o pêndulo da figura ao lado é deslocado de sua posição de equilíbrio de um ângulo θ , surge um torque restaurador

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

com módulo:

$$\tau = -\,(mg\,sen\theta)\,h$$

e esse é o torque resultante, portanto:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ou seja:

$$\tau = -mgh\,\mathrm{sen}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ou ainda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Para pequenas oscilações do pêndulo, podemos aproximar $sen\theta \approx \theta$, e teremos então:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0$$

A equação anterior define a frequência angular de oscilação do pêndulo físico:

$$w = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

e tem como solução:

$$\theta(t) = \theta_M \cos(wt + \delta)$$

MHS e o movimento circular e uniforme

Vamos considerar um corpo que descreve um movimento circular e uniforme, com velocidade constante v em um círculo de raio R. O vetor posição $\vec{r}(t)$ que descreve a trajetória do corpo tem módulo constante, e suas projeções nos eixos cartesianos são dadas por:

$$\vec{r}(t) = \hat{i}x(t) + \hat{j}y(t)$$

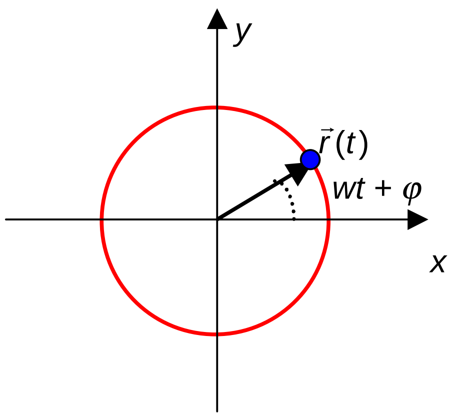
onde

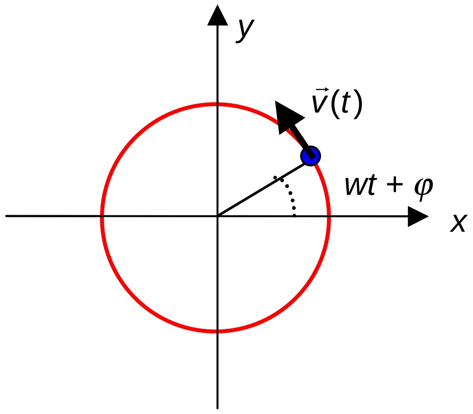
$$x(t) = R\cos(wt + \varphi)$$

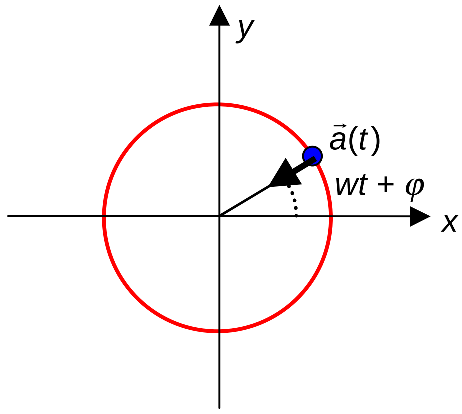
e

$$y(t) = R\,sen(wt + \varphi)$$

Observando a forma funcional de *x(t)* podemos concluir que o Movimento Harmônico Simples é a projeção do movimento circular e uniforme num diâmetro do círculo onde este último acontece.







A velocidade tem a forma:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \hat{i}v_X + \hat{j}v_Y$$

$$v_X = - w\, R\, sen(wt + \varphi)$$

$$v_y = + w\, R\, cos(wt + \varphi)$$

A aceleração tem a forma:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \hat{i}a_X + \hat{j}a_Y$$

$$a_X = - w^2\, R\, cos(wt + \varphi)$$

$$a_y = - w^2\, R\, sen(wt + \varphi)$$

MHS amortecido

Em diversas situações do nosso cotidiano, os movimentos oscilatórios têm uma duração finita, eles têm um começo e um fim. Não ficam se movendo no ir e vir de modo indefinido. Isso acontece, basicamente, devido a atuação de forças dissipativas tais como as forças de atrito.

Em uma situação simples as forças dissipativas podem ser representadas por uma função que depende linearmente da velocidade.

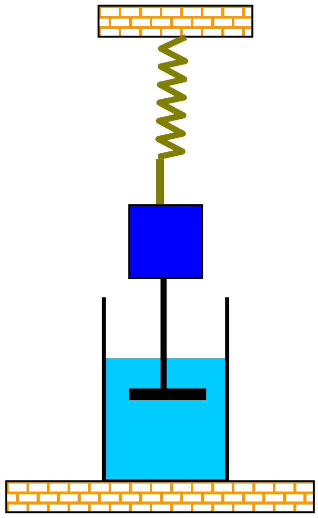
Vamos considerar um sistema composto de uma mola de constante elástica k com uma das extremidades presa ao teto e a outra suspendendo um corpo de massa m. Nesse corpo está presa uma haste vertical que tem a sua outra extremidade presa a um anteparo que está mergulhado em um líquido. Quando o anteparo se move no líquido

esse movimento é amortecido por uma força que surge devido à viscosidade do líquido.

Essa força dissipativa pode ser descrita por uma equação do tipo:

$$F_A = - b\, v$$

onde b é chamado de constante de amortecimento. A resultante das forças que atuam no corpo de massa m é dada por:



$$F = - k\, x - b\, v$$

ou seja:

$$m\, a = - k\, x - b\, v$$

A forma diferencial da equação anterior é:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0$$

onde

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução da equação diferencial anterior tem a forma:

$$x(t) = A\, e^{\alpha t}$$

onde A e α são constantes a serem determinadas. Aplicando essa forma na equação diferencial encontramos que:

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \left(\frac{b}{m}\right)A\alpha e^{\alpha t} + w_0^2 A e^{\alpha t} = 0$$

ou seja:

$$Ae^{\alpha t}\left[\alpha^2 + \left(\frac{b}{m}\right)\alpha + w_0^2\right] = 0$$

Como $Ae^{\alpha t} \neq 0$, teremos então que:

$$\alpha^2 + \left(\frac{b}{m}\right)\alpha + w_0^2 = 0$$

cujas soluções são:

$$\alpha = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4w_0^2}}{2}$$

ou ainda:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - w_0^2}$$

*Vamos considerar inicialmente que o movimento é **sub-amortecido** :*

$$w_0^2 > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

e definir:

$$w_A = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

logo:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm i\,w_A$$

A função *x(t)* terá, então, a forma:

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{bt}{2m} + iw_A t} + A_2 e^{-\frac{bt}{2m} - iw_A t}$$

ou seja:

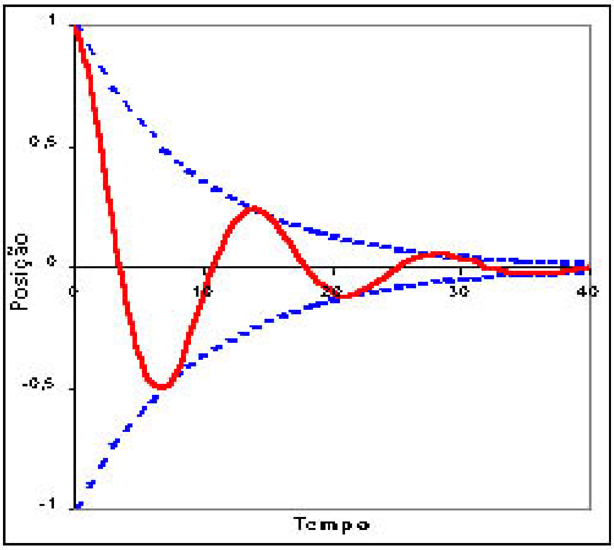
$$x(t) = \left(A_1 e^{+iw_A t} + A_2 e^{-iw_A t}\right) e^{-\frac{bt}{2m}}$$

e usando uma transformação equivalente àquela do MHS, temos que:

$$x(t) = x_M e^{-bt/2m} \cos(w_A t + \varphi)$$

A equação da posição em função do tempo tem a forma da curva da figura ao lado. Ela é um cosseno multiplicado por uma exponencial, e o resultado é um cos-seno cuja amplitude de oscilação vai diminuindo à medida que as oscilações se processam.

Um exemplo típico dessa situação é a porta dos *saloons* dos filmes de *bang-bang*. Quando alguém passa pela porta ela inicia a oscilação com uma grande amplitude, que vai diminuindo com o tempo.



*Quando supomos que o movimento é **super-amortecido** , temos que:*

$$w_0^2 < \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

temos

$$w_B = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - w_0^2}$$

e o parâmetro α agora tem a forma:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm w_B$$

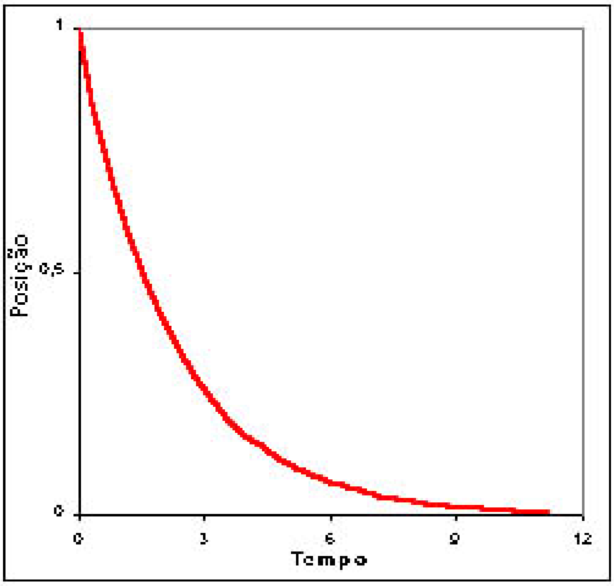
e à partir dele encontramos a equação da posição em função do tempo:

$$x(t) = \left(A_1 e^{+w_B t} + A_2 e^{-w_B t}\right) e^{-\frac{bt}{2m}}$$

ou, se redefinirmos as constantes:

$$x(t) = x_M e^{-bt/2m} \cosh(w_B t + \varphi)$$

A equação da posição em função do tempo tem a forma da curva da figura ao lado. Ela é um cosseno hiperbólico multiplicado por uma exponencial, e o resultado é um decréscimo monotônico da amplitude.



Na realidade não chega a acontecer nenhuma oscilação, e à medida que o tempo evolui , a amplitude de oscilação vai ficando sempre menor.

Um exemplo típico dessa situação é a porta dos escritórios. Quando alguém passa pela porta ela inicia a um movimento em direção ao repouso na posição de equilíbrio.

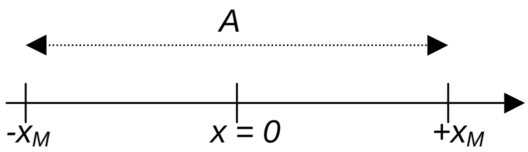
Solução de alguns problemas

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

01 Um objeto sujeito a um movimento harmônico simples leva *0,25s* para ir de um ponto de velocidade zero até o próximo ponto onde isso ocorre. A distância entre esses pontos é de *36cm* .

a) Calcule o período do movimento.

$A = 36cm = 0,36m = 2x_M$
$T/2 = 0,25s$



Considerando o movimento harmônico simples, a velocidade é nula nos dois pontos de elongação máxima $x = \pm x_M$. Por outro lado, o tempo para ir de um extremo ao outro é igual a metade do período. Desse modo:

$$T = 0,5s$$

b) Calcule a frequência do movimento.

$$f = 1/T = 1/0,5 \quad \therefore \quad f = 2Hz$$

c) Calcule a amplitude do movimento.

$$x_M = 0,18m$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

03 Um bloco de *4,0Kg* está suspenso de uma certa mola, estendendo-a a *16,0cm* além de sua posição de repouso.

a) Qual a constante da mola?

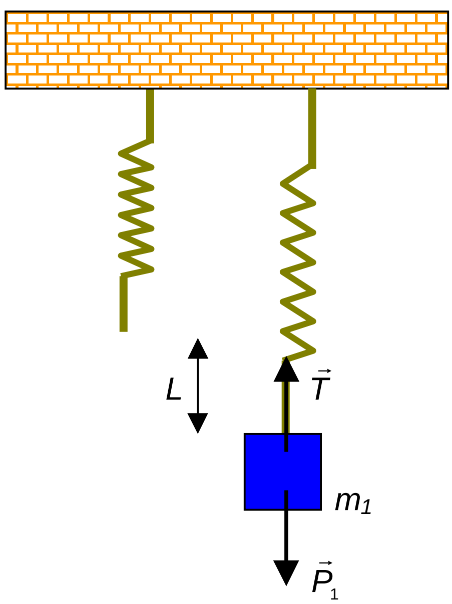
$m_1 = 4Kg$
$L = 16cm = 0,16m$

Como o bloco está em repouso, existe o equilíbrio entre as forças que estão atuando nele. O peso e a força restauradora elástica são iguais, logo:

$$\vec{F} + \vec{P}_1 = 0$$

ou seja:

$$k\,L - m_1\,g = 0$$



$$k = \frac{m_1 g}{L} = \frac{4x9{,}8}{0{,}16}$$

$k = 245N/m$

$$w_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{245}{4}} = 7{,}8rad/s \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = 0{,}8s$$

b) O bloco é removido e um corpo de 0,5Kg é suspenso da mesma mola. Se esta mola for então puxada e solta, qual o período de oscilação?

$m_2 = 0{,}5Kg$

$$w_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{245}{0{,}5}} = 22{,}1rad/s \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{2\pi}{w_2} = 0{,}28s$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
10	O diafragma de um alto-falante está vibrando num movimento harmônico simples com a frequência de *440Hz* e um deslocamento máximo de *0,75mm* .

a) Qual é a frequência angular deste diafragma?

$w = 2\pi f = 2764{,}60Hz$

$f = 440Hz$
$x_M = 0{,}75mm = 7{,}5x10^{-4}m$

b) Qual é a velocidade máxima deste diafragma?

$$v_M = w\, x_M = 2{,}07m/s$$

c) Qual é a aceleração máxima deste diafragma?

$$a_M = w^2\, x_M = 5732{,}25m/s^2$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
11	Podemos considerar que um automóvel esteja montado sobre quatro molas idênticas, no que concerne às suas oscilações verticais. As molas de um certo carro estão ajustadas de forma que as vibrações tenham uma frequência de *3,0Hz* .

a) Qual a constante de elasticidade de cada mola, se a massa do carro é de 1450kg e o peso está homogeneamente distribuído entre elas?

$f = 3Hz$
$M = 1450Kg$

Como o peso está distribuído uniformemente entre as quatro molas, cada mola suportará a quarta parte do peso total. Logo podemos definir $m = M/4$ e então:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \quad \therefore \quad \frac{k}{m} = (2\pi f)^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M}{4}(2\pi f)^2$$

$$k = 128.798,33N/m = 1,29x10^5 N/m$$

b) Qual será a frequência de vibração se cinco passageiros, com média de *73kg* cada um, estiverem no carro? (Novamente, considere uma distribuição homogênea de peso.)

$$m_P = 73Kg$$

O peso dos cinco passageiros será distribuída uniformemente entre as quatro molas, portanto:

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{M}{4} + \frac{5m_P}{4}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{M + 5m_P}} \quad \therefore \quad f = 2{,}68Hz$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
15	Um corpo oscila com movimento harmônico simples de acordo com a equação:

$$x(t) = (6{,}0m)\cos[(3\pi\ rad/s)\ t + \pi/3rad]$$

a) Em $t = 2{,}0s$, qual é o deslocamento nesse movimento?

$$x(2) = x_M \cos(2w + \varphi)$$

$$x(t) = x_M \cos(wt + \varphi)$$

Mas

$$\cos(2w + \varphi) = \cos(2.3\pi + \pi/3) = \cos(19\pi/3) = 0{,}5$$

$x_M = 6m$

$w = 3\pi\ rad/s$

$\varphi = \pi/3\ rad$

$$x(2) = 6\cos(19\pi/3) = 3m$$

b) Em $t = 2{,}0s$, qual é a velocidade nesse movimento?

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -w\,x_M\,\text{sen}(wt + \varphi)$$

$$v(2) = -w\,x_M\,\text{sen}(2w + \varphi)$$

Mas

$$\text{sen}(2w + \varphi) = \text{sen}(2.3\pi + \pi/3) = \text{sen}(19\pi/3) = 0{,}866$$

$$v(2) = -\ 3\pi\ 6\ \text{sen}(19\pi/3) = -48{,}97m/s$$

c) Em $t = 2{,}0s$, qual é a aceleração nesse movimento?

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -w^2\,x_M\cos(wt + \varphi)$$

$$a(2) = -w^2\,x_M\cos(2w + \varphi)$$

$$\cos(2w + \varphi) = \cos(2.3\pi + \pi/3) = \cos(19\pi/3) = 0{,}5$$

$$a(2) = -(3\pi)^2\ 6\cos(19\pi/3) = -266{,}47 m/s^2$$

d) Em $t = 2{,}0s$, qual é a fase nesse movimento?

$$\text{Fase} = \Phi(t) = wt + \varphi$$

$$\Phi(2) = 2w + \varphi = 19\pi/3 = 39{,}79 rad$$

e) Qual é a frequência deste movimento?

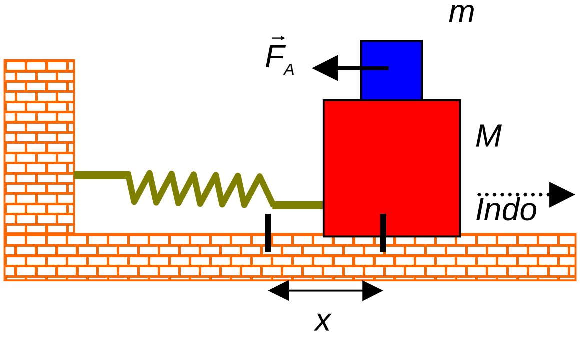
$$f = w/2\pi = 3\pi/2\pi = 1{,}5Hz$$

f) Qual é o período deste movimento?

$$T = 1/f = 2/3\ s$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
16	Dois blocos ($m = 1{,}0kg$ e $M = 10{,}0kg$) e uma única mola ($k = 200N/m$) estão colocados em uma superfície horizontal sem atrito, como ilustra a figura abaixo. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é $\mu_E = 0{,}40$. Qual a máxima amplitude possível do movimento harmônico simples, se não houver deslizamento entre os blocos?

Vamos considerar que na figura ao lado o conjunto está em movimento e passou da posição $x = 0$ (primeira figura) e se encaminha para a posição $x = +x_M$. A força máxima que os blocos exercerão entre si acontecerá quando $x = \pm x_M$ pois nessa situação $a = \pm a_M$.

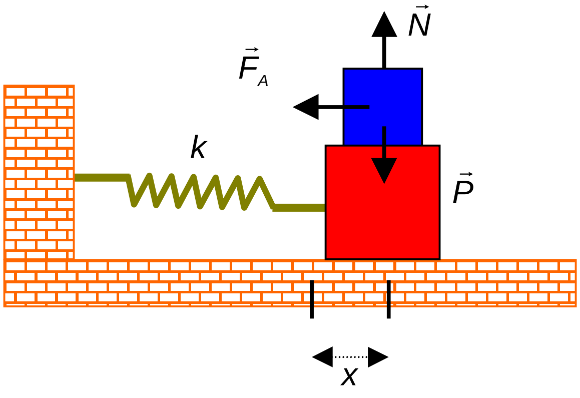


Se $F(x)$ for a força que a mola exerce no conjunto dos dois blocos, teremos essa força, numa posição genérica, com a forma:

$$F(x) = (m + M)\ a = k\ x$$

Como o conjunto está sendo retardado, a tendência do bloco menor é escorregar para frente, daí a força de atrito ser dirigida para trás.

Na posição de elongação máxima da mola, teremos:



$$F_M = (m + M)\ a_M = k\ x_M$$

ou seja

$$a_M = \left(\frac{k}{m+M} \right) x_M$$

Se considerarmos isoladamente o bloco menor, teremos que:

$$\begin{cases} F_A = m a_M \\ N = p = mg \end{cases}$$

Mas como $F_A = \mu_E N$, concluímos que:

$$m\, a_M = \mu_E\, m\, g \qquad \therefore \qquad a_M = \mu_E\, g$$

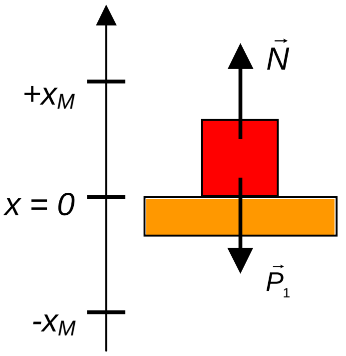
Mas

$$a_M = \mu_E g = \left(\frac{k}{m+M} \right) x_M \quad \Rightarrow \quad x_M = \frac{\mu_E (m+M) g}{k}$$

$$x_M = 0{,}22m = 22cm$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
18	Um bloco está num pistom que se move verticalmente em um movimento harmônico simples.

a) Se o MHS tem um período de $1{,}0s$, em que amplitude do movimento o bloco e o pistom irão se separar?



O bloco está sobre o pistom que oscila entre os limites $x = \pm x_M$. Usando a Segunda Lei de Newton, temos que:

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Acima da posição $x = 0$, ou seja para $x \geq 0$, nós temos que $\vec{a} = -\hat{i}\, a$

Nessa região ($x \geq 0$) a Segunda Lei de Newton toma a forma:

$$N - P = - ma \quad \therefore \quad N = m(g - a)$$

Quando o pistom está subindo desacelerado, depois de passar por $x = 0$, o valor da normal N começa a diminuir, até chegar ao seu valor mínimo em $x = + x_M$. Se a frequência aumentar, a desaceleração também aumentará. Existe um valor limite da desaceleração para a qual o bloco ainda manterá contato com o pistom.

Nesse limite teremos $a = g$ e consequentemente $N = 0$, segundo a equação anterior. Com a maior desaceleração para uma dada frequência acontece nos extremos do movimento, o pistom e o bloco ainda manterão o contato se em

$$x = +\,x_0 \quad , a = g$$

Mas

$$x(t) = x_M \cos(wt + \delta)$$

$$a(t_0) = -\,w^2\, x_M \cos(wt_0 + \delta) = -\,w^2\, x_0$$

$$x(t_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad |a(t_0)| = w^2\, x_0$$

Logo

$$w^2 x_0 = g \quad \therefore \quad x_0 = \frac{g}{w^2} = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$x_M = 0{,}248m = 24{,}8cm$$

b) Se o pistom tem uma amplitude de $5{,}0cm$, qual a frequência máxima em que o bloco e o pistom estarão continuamente em contato?

$x_M = 5cm = 0{,}05m$

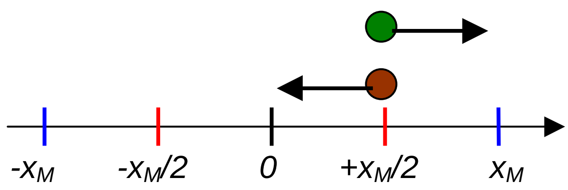
Do item anterior temos que:

$$x_M = \frac{g}{w^2} = \frac{g}{(2\pi f)^2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_M}} = 2{,}22Hz$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

22 Duas partículas executam um movimento harmônico simples com as mesmas amplitudes e frequências ao longo da mesma linha reta. Elas passam uma pela outra, movendo-se em sentidos opostos, cada vez que o seu deslocamento é a metade da amplitude. Qual a diferença de fase entre elas?

As partículas se passam uma pela outra em dois instantes: $t = t_1$ e $t=t_2$.

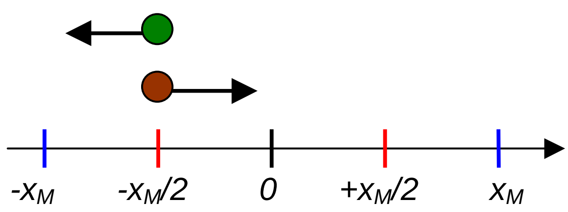


Quando $t=t_1$ temos que:

$$\begin{cases} x_A(t_1) = x_B(t_1) = \dfrac{x_M}{2} \\ \\ v_A(t_1) = -v_B(t_1) \end{cases}$$

Da primeira equação temos que:

$$x_M \cos(wt_1 + \varphi_A) = x_M \cos(wt_1 + \varphi_B) = x_M/2$$

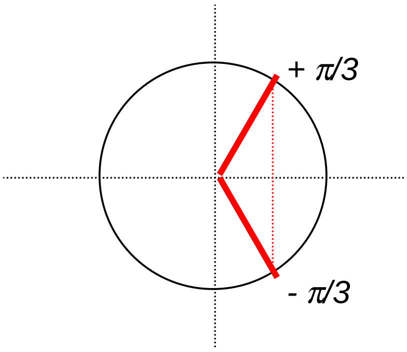


ou seja:

$$wt_1 + \varphi_A = 2n\pi \pm \pi/3 \qquad (1)$$

e

$wt_1 + \varphi_B = 2n\pi \pm \pi/3 \qquad (2)$



Por outro lado:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ou seja:

$$v_A(t_1) = -w\, x_M\, sen(wt_1 + \varphi_A)$$

e

$$v_B(t_1) = -w\, x_M\, sen(wt_1 + \varphi_B)$$

Considerando que nesse problema as velocidades devem ter sentidos contrários:

$$sen(wt_1 + \varphi_A) = -\, sen(wt_1 + \varphi_B)$$

Para que a equação anterior juntamente com as equações (1) e (2) sejam válidas simultaneamente, deveremos ter:

$$\Phi_A(t_1) = wt_1 + \varphi_A = 2n\pi + \pi/3$$

e

$$\Phi_B(t_1) = wt_1 + \varphi_B = 2n\pi - \pi/3$$

onde $\Phi(t)$ é a fase do movimento de oscilação considerado no instante t e φ é a constante de fase.

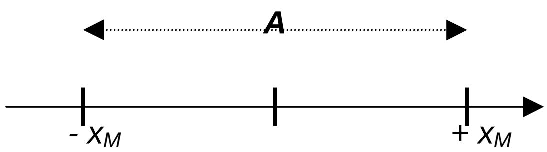
$$\Delta\Phi = \Phi_A(t_1) - \Phi_B(t_1) = 2\pi/3$$

$$\Delta\Phi = 2\pi/3 = 120^0$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6^a. edição	
23	Duas partículas oscilam em um movimento harmônico simples ao longo de um segmento de reta comum de comprimento A . Cada partícula tem um período de $1,5s$, mas diferem em fase de $\pi/6rad$.

a) Qual a distância entre elas, em termos de A , $0,5s$ após a partícula mais atrasada deixar uma das extremidades do percurso?

$T = 1,5s \quad \Rightarrow \quad w = 2\pi/T = 4\pi/3$
$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \pi/6$
$\Delta t = t_2 - t_1 = 0,5s$



$$x_A(t) = x_M \cos(wt + \varphi_A)$$

$$x_B(t) = x_M \cos(wt + \varphi_B)$$

Em $t = t_1$ a partícula A estará na extremidade, então:

$$x_A(t_1) = x_M \cos(wt_1 + \varphi_A) = \pm x_M$$

e isso implica que:

$$(wt_1 + \varphi_A) = n\pi$$

Considerando que $t_2 = t_1 + \Delta t$, temos:

$$x_A(t_2) = x_M \cos(wt_2 + \varphi_A) =$$

onde

$$wt_2 = w\,(t_1 + \Delta t) = w\, t_1 + w\, \Delta t$$

ou seja

$$x_A(t_2) = x_M \cos[\,(wt_1 + \varphi_A) + w\, \Delta t\,] = x_M \cos[\, n\pi + w\, \Delta t\,]$$

e como

$$w\, \Delta t = (4\pi/3)\, 0{,}5 = 2\pi/3$$

temos que

$$x_A(t_2) = x_M \cos[\, n\pi + 2\pi/3\,]$$

Mas

$$\cos[\, n\pi + 2\pi/3\,] = \cos(n\pi)\cos(2\pi/3) - \mathrm{sen}(n\pi)\mathrm{sen}(2\pi/3) = (-1)^{n+1}(0{,}5)$$

logo

$$x_A(t_2) = x_M \cos[\, n\pi + 2\pi/3\,] = (-1)^{n+1}(0{,}5)$$

Por outro lado

$$x_B(t_2) = x_M \cos(\, wt_2 + \varphi_B\,)$$

Como

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi$$

temos que

$$wt_2 + \varphi_B = w\,(\, t_1 + \Delta t\,) + (\, \varphi_A + \Delta\varphi\,) = (\, wt_1 + \varphi_A\,) + (\, w\Delta t + \Delta\varphi\,)$$

ou seja:

$$wt_2 + \varphi_B = n\pi + (\, w\Delta t + \Delta\varphi\,)$$

onde

$$w\Delta t = (\, 4\pi/3)\, 0{,}5 = 2\pi/3$$

$$\Delta\varphi = \pi/6$$

Logo

$$wt_2 + \varphi_B = n\pi + 5\pi/6$$

$$x_B(t_2) = x_M \cos[\, n\pi + 5\pi/6\,]$$

Mas

$$\cos[\, n\pi + 5\pi/6\,] = \cos(n\pi)\cos(5\pi/6) - \mathrm{sen}(n\pi)\mathrm{sen}(5\pi/6) = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou seja:

$$x_B(t_2) = x_M \cos[\, n\pi + 5\pi/6\,] = (-1)^{n+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A distância Δx que separa as duas partículas será dada por:

$$\Delta x = |\, x_A(t_2) - x_B(t_2)\,| = x_M\,|\,(-1)^{n+1}(0{,}5) - (-1)^{n+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta x = x_M\,|\, 0{,}5 - 0{,}866\,| = 0{,}366\, x_M$$

Mas como

$$A = 2\, x_M$$

$$\Delta x = 0{,}183\, A$$

b) Elas estão se movendo no mesmo sentido, em direção uma da outra ou estão se afastando?

$$v_A(t_2) = w\, x_M\, sen(wt_2 + \varphi_A) = -\, w\, x_M\, sen(2\pi/3 + n\pi)$$

$$v_B(t_2) = w\, x_M\, sen(wt_2 + \varphi_B) = -\, w\, x_M\, sen(5\pi/6 + n\pi)$$

Mas

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cos\beta + \cos\alpha\, sen\beta$$

logo

$$sen(2\pi/3 + n\pi) = sen(2\pi/3)\cos(n\pi) + sen(n\pi)\cos(2\pi/3) = (-1)^n\, sen(2\pi/3)$$

ou seja

$$sen(2\pi/3 + n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por outro lado:

$$sen(5\pi/6 + n\pi) = sen(5\pi/6)\cos(n\pi) + sen(n\pi)\cos(5\pi/6) = (-1)^n\, sen(5\pi/6)$$

ou seja

$$sen(5\pi/6 + n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}$$

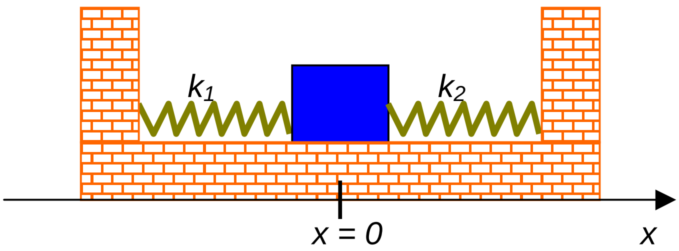
e finalmente:

$$\begin{cases} v_A(t_2) = (-1)^{n+2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ v_B(t_2) = (-1)^{n+2}\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como as duas partículas têm velocidades com mesmo sinal, elas estão se movendo no mesmo sentido.

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
24	Duas molas idênticas estão ligadas a um bloco de massa m e aos dois suportes mostrados na figura ao lado. Mostre que a frequência de oscilação na superfície sem atrito é:

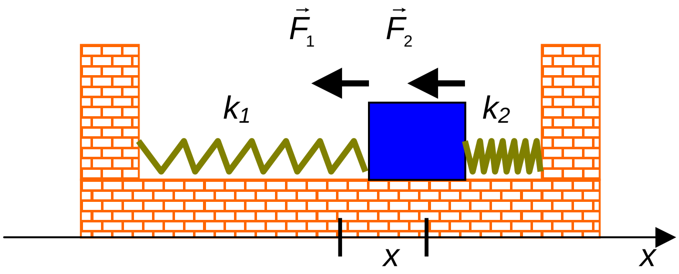
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$



Vamos distinguir as molas com os rótulos k_1 e k_2 . Considerando que o corpo deslocou-se de uma distância x para a direita, à partir de sua posição de equilíbrio em $x=0$, temos que:

$$\vec{F}_1 = -k_1 x\,\hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = -k_2 x\,\hat{i}$$



$k_1 = k_2 = k$

Se considerarmos que o corpo vai sentir a ação das duas molas como se fosse apenas uma mola, teremos:

$$\vec{F} = -\kappa\, x\,\hat{i}$$

Mas de acordo com a suposição, a força equivalente é igual à soma das duas forças, e portanto:

$$\kappa = k_1 + k_2 \quad \therefore \quad w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Mas $k_1 = k_2 = k$, ou seja $\kappa = 2k$, e desse modo:

$$w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

25 Suponha que as duas molas da figura do *problema 33* têm constantes diferentes k_1 e k_2 . Mostre que a frequência f das oscilações do bloco é então dada por:

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Como já foi deduzido

$$w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

logo:

$$w^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = w_1^2 + w_2^2$$

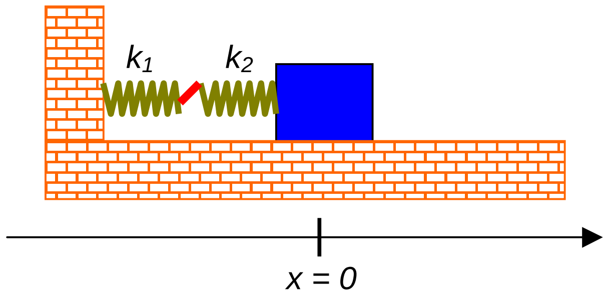
ou seja:

$$(2\pi)^2 f^2 = (2\pi)^2 \left(f_1^2 + f_2^2\right) \quad \Rightarrow \quad f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

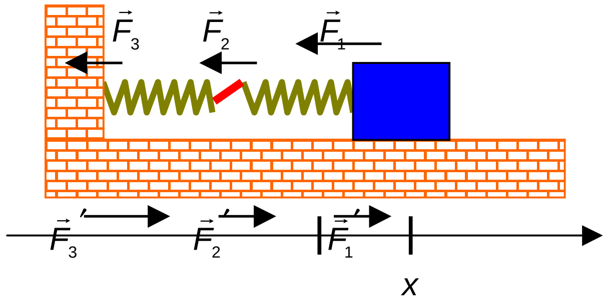
27 Duas molas estão ligadas entre si e conectadas a determinada massa m , como mostra figura ao lado. A superfície é sem atrito. Se ambas as molas tiverem uma constante de elasticidade k , mostre que a frequência da oscilação de m é dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$



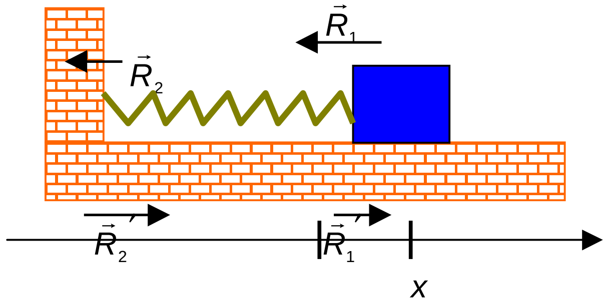
Vamos distinguir as molas com os rótulos k_1 e k_2 . Vamos considerar que a mola *1* se distende de x_1 e a mola *2* se distende de x_2 , e a distensão do conjunto é x . Logo:

$$x = x_1 + x_2$$



Diante destas distensões, surgem as forças representadas na figura ao lado: $\vec{F}_3$ = força que a parede faz na mola da esquerda. $\vec{F}_3'$ = força que a mola da esquerda faz na parede. De acordo com a Terceira Lei de Newton $\vec{F}_3' = -\vec{F}_2$.

A convenção anterior será utilizada para todos os pares de forças.



Quando temos apenas uma mola substituindo as duas molas mencionadas:

$$\vec{R}_1 = -\hat{i}\,k\,x$$

Como as molas têm massa desprezível, é nula a resultante das forças que nela atuam, ou seja:

$$\vec{R}_1' + \vec{R}_2 = 0$$

Pela Terceira Lei de Newton:

$$\begin{cases} \vec{R}_1 = -\vec{R}_1' \\ \vec{R}_2 = \vec{R}_2' \end{cases}$$

Usando as três últimas equações, constatamos que:

$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2'$$

ou seja: a força que a mola faz no bloco tem o mesmo módulo da força que esta mola faz na parede. Estamos aptos a fazer a comparação entre a mola única e o conjunto de molas no que diz respeito as interações desses sistemas com a parede e o bloco.

Por outro lado, considerando o deslocamento de cada mola, teremos que:

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{\,\prime} = +\hat{i}\, k_1\, x_1 \\ \\ \vec{F}_2^{\,\prime} = +\hat{i}\, k_2\, x_2 \end{cases}$$

Se observarmos as forças que atuam no sistema das duas molas encontramos que:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\vec{F}_1^{\,\prime} \\ \vec{F}_2 = -\vec{F}_2^{\,\prime} \\ \vec{F}_3 = -\vec{F}_3^{\,\prime} \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \vec{F}_1^{\,\prime} + \vec{F}_2 = 0 \\ \\ \vec{F}_2^{\,\prime} + \vec{F}_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja: todas as forças envolvidas têm o mesmo módulo, e portanto:

$$x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{k} = \frac{F_1^{\,\prime}}{k_1} + \frac{F_2^{\,\prime}}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

logo:

$$\kappa = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

e então:

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

Se $k_1 = k_2 = k$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

29 Uma mola uniforme, cujo comprimento de repouso é L, tem uma constante de força k. A mola é cortada em duas partes com comprimentos de repouso L_1 e L_2.

a) Quais as correspondentes constantes de força k_1 e k_2 em termos de n e k.

$$L = L_1 + L_2$$

Quando a mola se distende de x, os pedaços distender-se-ão respectivamente de x_1 e x_2, tal que:

$$x = x_1 + x_2$$

Como a mola é uniforme, podemos supor que ao distender-se o comprimento dos pedaços manterão a mesma relação de proporcionalidade. Se D é o comprimento da mola quando distendida, temos que:

$$D = L + x \quad \Rightarrow \quad D_1 = nD_2 \quad \therefore \quad L_1 + x_1 = n(L_2 + x_2)$$

ou seja:

$$x_1 = n\, x_2$$

logo

$$L = L_1 + L_2 = nL_2 + L_2 = (n+1)L_2$$

e

$$x = x_1 + x_2 = nx_2 + x_2 = (n+1)x_2$$

No *problema 35* temos duas molas alinhadas e formando um conjunto, e encontramos que todas as forças envolvidas têm o mesmo módulo. Assim:

$$F = F_1 = F_2 \quad \therefore \quad k\, x = k_1\, x_1 = k_2\, x_2$$

Logo

$$k\, x = k_1\, x_1 \quad \Rightarrow \quad k[(n+1)x_2] = k_1[nx_2] \quad \therefore \quad k_1 = k[(n+1)/n]$$

e

$$k\, x = k_2\, x_2 \quad \Rightarrow \quad k[(n+1)x_2] = k_2 x_2 \quad \therefore \quad k_2 = k(n+1)$$

b) Se um bloco for ligado à mola original, oscila com frequência f . Se esta última for substituída por pedaços L_1 ou L_2 , a frequente correspondente é f_1 ou f_2 . Ache f_1 e f_2 em termos de f .

$$\begin{cases} f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1}{m}} \\ f_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_2}{m}} \end{cases}$$

$$\frac{f_1}{f} = \sqrt{\frac{k_1}{k}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad \therefore \quad f_1 = f\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{f_2}{f} = \sqrt{\frac{k_2}{k}} = \sqrt{n+1} \quad \therefore \quad f_1 = f\sqrt{n+1}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
36	Um bloco de massa M , em repouso numa mesa horizontal sem atrito, é ligado a um suporte rígido por uma mola de constante k . Uma bala de massa m e velocidade v atinge o bloco como mostrado na figura à seguir. A bala penetra no bloco.

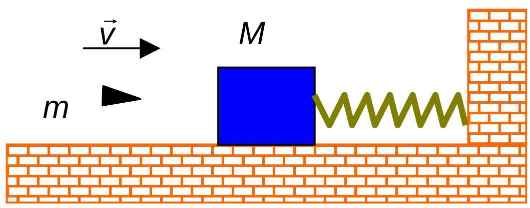
a) Determine a velocidade do bloco imediatamente após a colisão.

Usando a conservação do momento linear, temos que:

$$m\, v = (m + M)\, V$$

ou seja:

$$V = \left(\frac{m}{m+M}\right) v$$



b) Determine a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

A energia cinética do conjunto bala + massa logo após a colisão transformar-se-á em energia potencial elástica quando a mola for comprimida e o bloco para à direita. Logo:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}k\,x_M^2 \quad \Rightarrow \quad x_M^2 = \left(\frac{m+M}{k}\right)V^2 = \left(\frac{m+M}{k}\right)\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)v\right]^2$$

ou seja:

$$x_M = \sqrt{\frac{m^2v^2}{k(m+M)}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
37	Quando o deslocamento no movimento harmônico simples é metade da amplitude x_M

a) Que fração da energia total é cinética? Que fração da energia total é potencial?

$$x(t) = x_M\cos(wt + \varphi)$$

$$\begin{cases} U(t) = \dfrac{1}{2}k\,x(t)^2 = \dfrac{1}{2}k\,x_M^2\cos^2(wt+\varphi) \\ K(t) = \dfrac{1}{2}m\,v(t)^2 = \dfrac{1}{2}k\,x_M^2 sen^2(wt+\varphi) \end{cases}$$

Para um dado instante $t = t_0$ o deslocamento é metade da amplitude, logo:

$$x(t_0) = x_M/2 \quad \Rightarrow \quad cos(wt_0 + \varphi) = 1/2$$

A fase $\Phi(t_0)$ tem a forma:

$$\Phi(t_0) = wt_0 + \varphi = \pi/3$$

A energia total, ou energia mecânica E é a soma das energias cinética e potencial:

$$E = K + U = \frac{1}{2}k\,x_M^2$$

$$\begin{cases} U(t_0) = \dfrac{1}{2}k\,x_M^2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}k\,x_M^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}E \\ K(t_0) = \dfrac{1}{2}k\,x_M^2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}k\,x_M^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}E \end{cases}$$

c) Com que deslocamento, em termos da amplitude, a energia do sistema é metade cinética e metade potencial?

Para um dado instante $t = t_1$ a energia cinética é igual à energia potencial e cada uma delas é a metade da metade da energia mecânica:

$$2E = \frac{1}{2} k\, x_M^2 \cos^2(wt_1 + \varphi) = \frac{1}{2} k\, x_M^2 \,\mathrm{sen}^2(wt_1 + \varphi)$$

Desse modo

$$cos(wt_1 + \varphi) = \pm\, sen(wt_1 + \varphi)$$

$$\Phi(t_1) = wt_1 + \varphi = n\pi \pm \pi/4$$

Logo:

$$x(t_1) = x_M\, cos(wt_1 + \varphi) = x_M\, cos(\pi/4)$$

$$\frac{x(t_1)}{x_M} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
41	A roda de balanço de um relógio oscila com uma amplitude angular de π *rad* e um período de *0,5s* .

a) Ache a velocidade angular máxima da roda.

$$\theta(t) = \theta_M\, cos(wt + \varphi)$$
$$\theta_M = \pi\, rad$$
$$T = 0{,}5s$$

$$\dot{\theta}(t) \equiv \frac{d\theta(t)}{dt} = -w\theta_M sen(wt + \varphi)$$

$$\left[\dot{\theta}(t)\right]_M = w\theta_M = \frac{2\pi}{T}\theta_M = \left(\frac{2\pi}{1/2}\right)\pi \quad \therefore \quad \left[\dot{\theta}(t)\right]_M = 4\pi^2$$

b) Ache a velocidade angular da roda quando o seu deslocamento for de $\pi/2$ *rad* . Vamos considerar que o deslocamento tem o valor estipulado quando $t = t_1$. Desse modo:

$$\theta(t_1) = \theta_M \cos(wt_1 + \varphi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(wt_1 + \varphi) = \frac{\pi/2}{\theta_M} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad wt_1 + \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

Logo:

$$\dot{\theta}(t_1) = -w\theta_M \,\mathrm{sen}(wt_1 + \varphi) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)\theta_M \,\mathrm{sen}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{2\pi}{0{,}5}\right)\pi\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{\theta}(t_1) = \mp 2\pi^2\sqrt{3}\, rad/s$$

c) Ache a aceleração angular da roda quando o seu deslocamento for de $\pi/4$ *rad* .

Vamos considerar que o deslocamento tem o valor estipulado quando $t = t_2$. Desse modo:

$$\theta(t_2) = \theta_M \cos(wt_2 + \varphi) = \frac{\pi}{4}$$

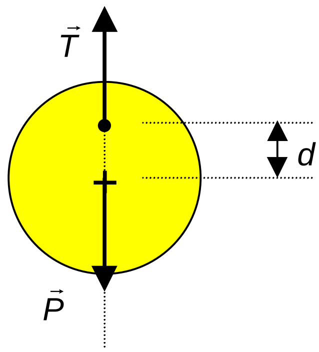
$$\cos(wt_2 + \varphi) = \frac{\pi/4}{\theta_M} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad wt_2 + \varphi = \pm 1{,}318\, rad$$

$$\dot{\theta}(t_2) = -w\theta_M \operatorname{sen}(wt_2 + \varphi) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)\theta_M \operatorname{sen}(\pm 1{,}318) = -\left(\frac{2\pi}{0{,}5}\right)\pi\,(\pm 0{,}968)$$

$$\dot{\theta}(t_1) = \mp 3{,}872\pi^2\ rad/s$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
46	Um pêndulo físico consiste em um disco sólido uniforme (de massa M e raio R) , suportado num plano vertical por um eixo localizado a uma distância d do centro do disco - ver figura à seguir. O disco é deslocado um pequeno ângulo e liberado. Ache uma expressão para o movimento harmônico simples resultante.

Seja $\vec{P}$ o peso do disco e $\vec{T}$ a força que o eixo exerce sobre esse disco. Quando esse sistema está em repouso a resultante das forças e o torque resultante são nulos. Quando ele começa a oscilar, o torque resultante é diferente de zero, e tem a forma:

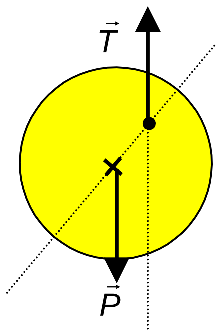


$$\tau = -\, P\, d\, sen\theta = I\alpha$$

onde I é o momento de inércia do disco em relação ao eixo de giro. Por outro lado:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 = M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)$$



Da primeira equação temos que:

$$\alpha + \frac{Pd}{I}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para pequenas oscilações podemos aproximar o seno pelo seu argumento, logo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgd}{I}\right)\theta = 0 \quad \therefore \quad w^2 = \frac{Mgd}{I}$$

$$w = \sqrt{\frac{Mgd}{I}} = \sqrt{\frac{2gd}{R^2 + 2d^2}}$$

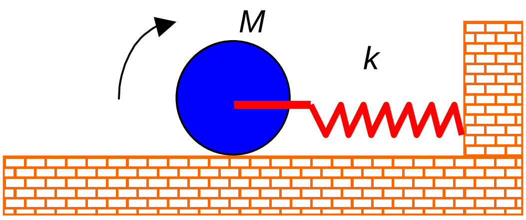
Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
50	Um cilindro sólido está ligado a uma mola horizontal sem massa de forma que ele possa rolar, sem deslizamento, sobre uma superfície horizontal. A constante da mola é $k = 3{,}0N/m$. Se o sistema for liberado de uma posição de repouso em que a mola esteja distendida de 0,25m ,

Mostre que nessas condições o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples com período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

onde M é a massa do cilindro. (Sugestão: Ache a derivada da energia mecânica total em relação ao tempo) .

$I_{CM} = MR^2/2$



$K = K_{Rot} + K_{Trans}$

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}w^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

Mas

$$v_{CM} = wR$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{1}{4}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2$$

$$\begin{cases} K_{Trans} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \\ K_{Rot} = \frac{1}{4}Mv_{CM}^2 \end{cases}$$

$$E = K + U = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

Como o sistema é conservativo a energia mecânica não varia, e portanto:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}M\left(2v_{CM}\frac{dv_{CM}}{dt}\right) + \frac{1}{2}k\left(2x\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

ou seja:

$$\left(\frac{3}{2}M\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x\right)v_{CM} = 0$$

Mas como $v_{CM} \neq 0$, temos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2k}{3M}\right)x = 0$$

O sistema considerado obedece a equação diferencial acima, e portanto ele tem frequência angular natural de:

$$w = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

a) Ache a energia cinética translacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

No ponto de elongação máxima a posição é dada por x_M e nessa ocasião a velocidade é nula. No ponto de equilíbrio a elongação é nula e a velocidade é máxima com o valor v_M . Desse modo, considerando a conservação da energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2}k\,x_M^2 = \frac{3}{4}M\,v_{CM}^2 \quad \therefore \quad v_{CM}^2 = \frac{2k}{3M}x_M^2$$

e finalmente:

$$K_{Trans} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{2k}{3M}x_M^2\right) \quad \therefore \quad K_{Trans} = \frac{1}{3}k\,x_M^2$$

b) Ache a energia rotacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

$$K_{Rot} = \frac{1}{4}Mv_{CM}^2 \quad \therefore \quad K_{Rot} = \frac{1}{6}k\,x_M^2$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

52 Uma haste de comprimento L oscila como um pêndulo físico, com eixo no ponto O , como mostra a figura à seguir.

a) Deduza uma expressão para o período do pêndulo em termos de L e x a distância do ponto de suspensão ao centro de massa do pêndulo.

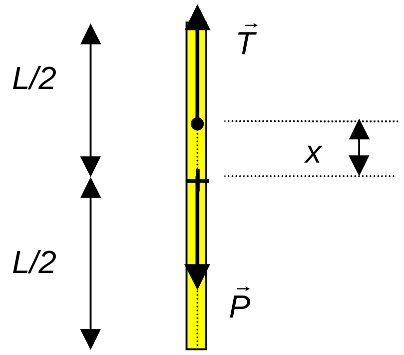
Seja $\vec{P}$ o peso da haste e $\vec{T}$ a força que o eixo exerce sobre essa haste. Quando esse sistema está em repouso a resultante das forças e o torque resultante são nulos. Quando ela começa a oscilar, o torque resultante é diferente de zero, e tem a forma:

$$\tau = - P\,x\,sen\theta = I\alpha$$

onde I é o momento de inércia da haste em relação ao eixo de giro. Por outro lado:

$$I = I_{CM} + Mx^2$$

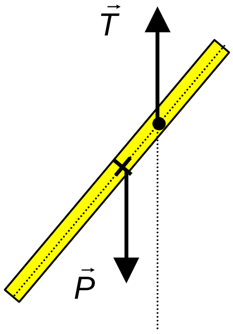
$$I = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2 = M\left(\frac{L^2}{12} + x^2\right)$$



Da primeira equação temos que:

$$\alpha + \frac{Px}{I}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para pequenas oscilações podemos aproximar o seno pelo seu argumento, logo:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgx}{I}\right)\theta = 0 \quad \therefore \quad w^2 = \frac{Mgx}{I}$$

$$w = \sqrt{\frac{Mgx}{I}} = \sqrt{\frac{12gx}{L^2 + 12x^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{12gx}}$$

b) Para qual valor de *x/L* o período é mínimo?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2\left[1 + 12\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]}{L\left[12g\left(\frac{x}{L}\right)\right]}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{1 + 12\left(\frac{x}{L}\right)^2}{12\left(\frac{x}{L}\right)}}$$

Vamos definir:

$$T_0 \equiv 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad e \quad u = \frac{x}{L}$$

logo:

$$T(u) = T_0\sqrt{\frac{1 + 12u^2}{12u}} = T_0\left(u + \frac{1}{12u}\right)^{1/2}$$

$$\frac{dT}{du} = T_0\left(-\frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{1}{12u}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{12u^2}\right)$$

$$\frac{dT}{du} = -\frac{T_0}{2}\frac{1 - \frac{1}{12u^2}}{\left(u + \frac{1}{12u}\right)^{1/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{12u^2} = 0 \quad \therefore \quad u_M = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

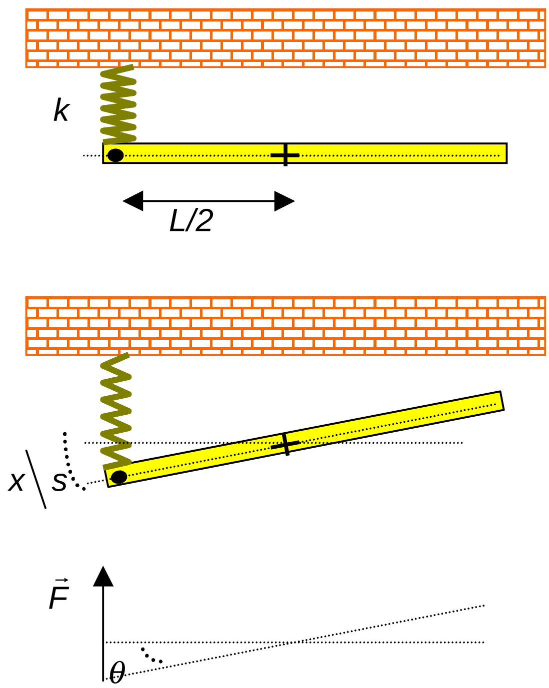
$$u_M = \frac{x_M}{L} = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \Rightarrow \quad x_M = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

c) Mostre que se $L = 1{,}0m$, e $g = 9{,}8m/s^2$, esse mínimo é $1{,}53s$.

$$T_M = T(u_M) = T_0\left(u_M + \frac{1}{12u_M}\right)^{1/2}$$

$$T_M = 1{,}519s$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
53	Uma haste longa e uniforme de comprimento L e massa m roda livremente no plano horizontal em torno de um eixo vertical, através de seu centro. Uma determinada mola com constante de força k é ligada horizontalmente entre um extremidade da haste e uma parede fixa, conforme figura à seguir. Quando a haste está em equilíbrio fica paralela à parede. Qual o período das pequenas oscilações que resultam, quando a haste é ligeiramente girada e liberada?



Quando a haste se desloca de um ângulo θ um ponto de sua extremidade traça um arco de comprimento s , e este ponto está distante x da posição de equilíbrio.

A mola exerce uma força F na haste e essa força produz um torque τ

$$\tau = - F (L/2) \cos\theta$$

Para pequenas oscilações podemos aproximar $\cos\theta \approx 1$, logo

$$\tau = -F (L/2)$$

Mas $F = k\,x$, e como θ é pequeno podemos aproximar a corda (x) pelo arco ($s = \theta\,.\,L/2$) , ou seja:

$$x \approx s = \theta\,(L/2)$$

Desse modo:

$$\tau = -k.x.\frac{L}{2} \approx -k\left(\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2} \quad \therefore \quad \tau = -\left(\frac{kL^2}{4}\right)\theta$$

Mas, por outro lado:

$$\tau = I\alpha = \left(\frac{mL^2}{12}\right)\ddot{\theta}$$

ou seja:

$$\tau = \left(\frac{mL^2}{12}\right)\ddot{\theta} = -\left(\frac{kL^2}{4}\right)\theta \quad \therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{3k}{m}\right)\theta = 0$$

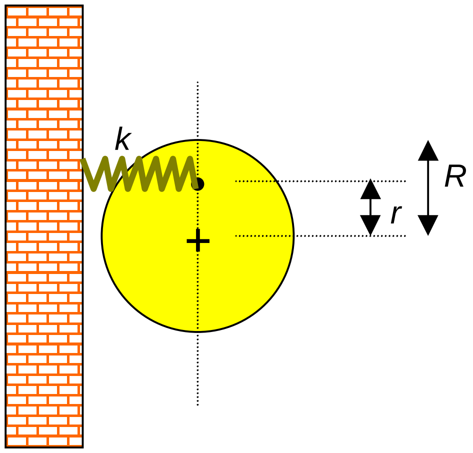
e portanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

58 Uma roda gira livremente em torno de seu eixo fixo. Uma mola está ligada a um de seus raios, a uma distância r do eixo, como mostra a figura à seguir.

a) Considerando que a roda é um aro de raio R e massa m, obtenha a frequência angular de pequenas oscilações deste sistema em termos de m, R, r e a constante da mola k.



Como no *problema 75*, temos que:

$$\tau = - F\, r\, \cos\theta \approx - F\, r$$

Mas

$$F = k\, x \approx k\, r\, \theta$$

Logo

$$\tau = - (k\, r\, \theta)\, r = - k\, r^2\, \theta$$

Mas por outro lado:

$$\tau = I\alpha = \left(mR^2\right)\ddot{\theta}$$

ou seja:

$$\tau = \left(mR^2\right)\ddot{\theta} = -kr^2\theta \quad \therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{kr^2}{mR^2}\right)\theta = 0$$

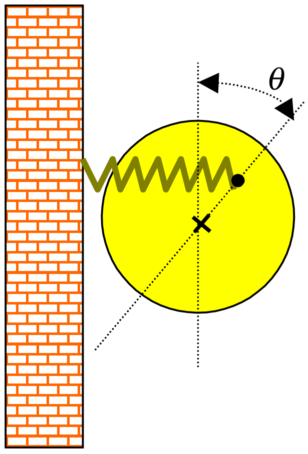
$$w^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = w_0^2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \therefore \quad w = w_0\,\frac{r}{R}$$

b) Como mudaria o resultado se $r = R$?

Quando $r = R$, teremos:

$$w = w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

c) Como mudaria o resultado se $r = 0$?



Se $r = 0$, a mola estará fixa no eixo, e consequentemente não exercerá influência na possível oscilação. Da equação que deduzimos para a frequência em função dos parâmetros chegamos ao resultado que

$$w = 0$$

nessa situação.