

Notas de Aula de Física

15. FLUIDOS	2
DENSIDADE	2
PRESSÃO.....	2
FLUIDO EM REPOUSO	3
O PRINCÍPIO DE PASCAL	4
O PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES	4
FLUIDOS IDEAIS EM MOVIMENTO	4
LINHAS DE CORRENTE E A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE.....	5
A EQUAÇÃO DE BERNOULLI	6
O MEDIDOR DE VENTURI	9
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	11
01.....	11
05.....	11
07.....	12
11.....	14
12.....	15
15.....	16
19.....	17
22.....	19
26.....	19
27.....	20
29.....	21
31.....	22
36.....	22
47.....	23
48.....	24
“49”.....	25
49.....	26
50.....	27
53.....	29
57.....	30
68.....	31
“73”.....	32

15. Fluidos

Fluidos compreendem líquidos e gases. Os líquidos escoam sob a ação da gravidade até preencherem as regiões mais baixas possíveis dos vasos que os contêm. Os gases se expandem até ocuparem todo o volume do vaso, qualquer que seja a sua forma.

As moléculas em um gás não têm restrição de movimento dentro do recipiente que o contém, e podem se deslocar através de toda essa região do espaço.

Já o líquido está restrito a se mover abaixo da sua superfície. Grande parte de suas moléculas não têm energia suficiente para vencer essa barreira imposta pela superfície, daí a contenção entre a sua superfície e as paredes do recipiente.

Na Mecânica dos Fluidos estudamos o movimento do conjunto de partículas e não o de cada partícula, como na Mecânica Newtoniana.

Densidade

Define-se densidade ρ de um material como a relação entre a sua massa e o seu volume. De maneira formal, analisamos apenas uma pequena porção do material de massa Δm e volume ΔV e definimos a sua densidade como:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

e se este material tiver uma distribuição uniforme de massa, a sua densidade será a mesma em todas as suas partes. Nesse caso teremos $\rho = m/V$.

Pressão

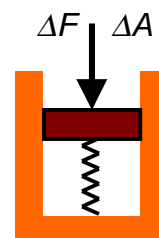
A pressão mede a relação entre a força aplicada a uma superfície e o tamanho da superfície considerada.

Seja ΔF a força que está sendo aplicada em um êmbolo de superfície ΔA . A pressão p que esta força está exercendo no êmbolo é definida como:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

À rigor, a pressão é definida para o limite desta razão, no limite quando a área tender à zero. Ou seja:

$$p = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = p dA$$



Fluido em repouso

Para deduzir a relação entre pressão, densidade e profundidade, analisemos um fluido de densidade ρ em repouso num dado recipiente, como mostrado na figura à seguir. Vamos considerar um cilindro imaginário desenhado nesse fluido. Esse cilindro tem superfícies A paralelas à superfície do fluido e uma altura dy ao longo da profundidade do fluido. A força líquida dF_R que o fluido exerce neste cilindro é dada por:

$$p A - (p + dp) A = dF_R$$

onde pA é a força que atua na superfície inferior e $(p + dp) A$ é a força que atua na superfície superior do cilindro imaginário. Como o cilindro está em repouso, essa força deve ser igual ao peso do cilindro. Desse modo:

$$- dp A = dF_R = g dm$$

Mas

$$dm = \rho dV = \rho A dy$$

ou seja:

$$dp = - \rho g dy$$

logo

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

Quando a densidade puder ser considerada uniforme, ou seja quando a densidade não variar com a altura, a integração terá a forma:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

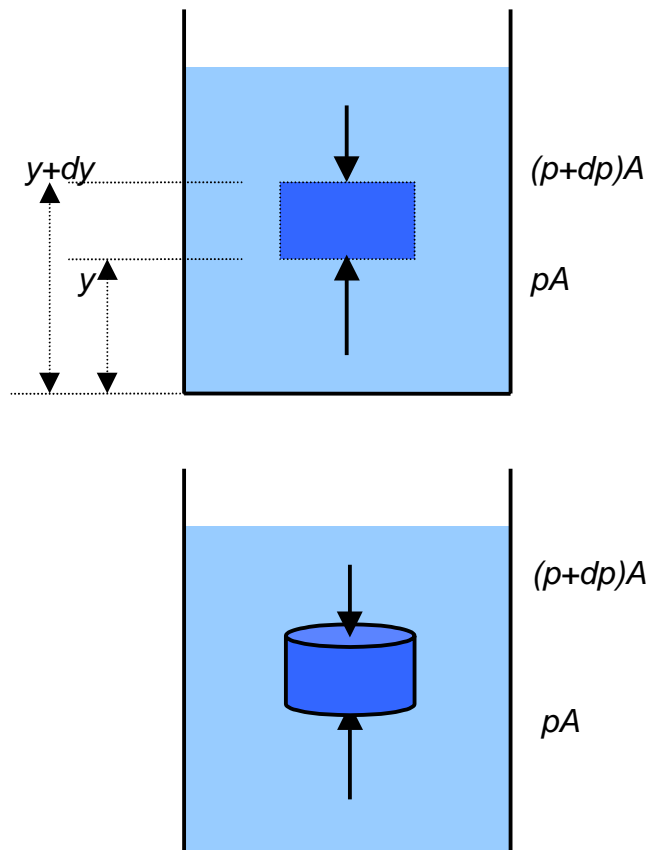
ou seja:

$$p_2 - p_1 = - \rho g (y_2 - y_1)$$

Considerando que a pressão aumenta com a profundidade, vamos definir a profundidade como h , a pressão nesta profundidade como p e a pressão superficial como p_0 , e desse modo:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Assim encontramos que a pressão varia linearmente com a profundidade h .



O Princípio de Pascal

A pressão aplicada a um fluido contido em um recipiente é transmitida integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente que o contém.

Se a pressão atmosférica for chamada de p_0 , a pressão em uma profundidade h deste fluido será dada por:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Caso a pressão atmosférica varie, e num certo dia ela passe para o valor p_1 onde $p_1 < p_0$, a pressão no interior do lago também irá variar como consequência desta mudança, e teremos:

$$p = p_1 + \rho g h$$

O Princípio de Arquimedes

Todo corpo total ou parcialmente imerso em um fluido, recebe deste um empuxo vertical dirigido para cima, de módulo igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.

Esse Princípio resume uma infinidade aspectos da influência de um líquido sobre um corpo sólido que nele está imerso (ou parcialmente imerso).

Porque um pedaço de madeira flutua e uma pedra afunda? Porque um navio flutua, mesmo sendo feito de ferro? Porque um submarino consegue ter controle sobre a escolha da profundidade em que se encontra? Questões deste tipo são respondidas com a aplicação do princípio de Arquimedes.

Fluidos ideais em movimento

O movimento de fluidos reais é complexo e ainda não é inteiramente compreendido. Por exemplo, não existe uma compreensão clara sobre o fenômeno das turbulências.

Vamos restringir a nossa análise aos fluidos ideais. São aqueles que apresentam um comportamento bem mais simples, e principalmente, sabemos analisar os seu movimento. Um fluido ideal tem pelo menos as seguintes características:

Escoamento estacionário

A velocidade do fluido em qualquer ponto fixo não muda com o tempo. Neste tipo de escoamento a velocidade de um elemento de volume do fluido pode variar enquanto ele muda de posição, mas a velocidade do fluido em cada ponto do espaço permanece constante ao longo do tempo.

Escoamento incompressível

A sua densidade é constante, independente das circunstâncias, como o aumento de pressão ou temperatura.

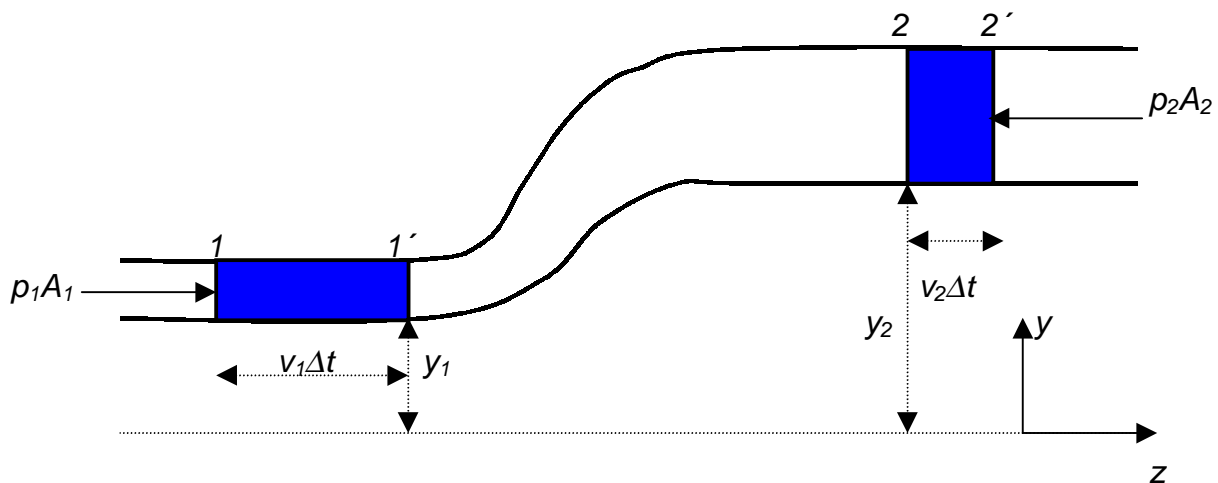
Como as linhas de corrente não se cruzam, elas se aproximam uma das outras à medida que o tubo de corrente diminui a sua seção transversal. Desse modo o adensamento de linhas de corrente significa o aumento da velocidade de escoamento.

A equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli relaciona variação de pressão, variação de altura e variação de velocidade em um fluido incompressível num escoamento estacionário. Ela é obtida como uma consequência da conservação da energia.

Considere um tubo de largura variável por onde entra um fluido à esquerda e sai à direita, como mostra a figura à seguir. À esquerda, o tubo tem seção transversal de área A_1 e à direita ele tem uma seção transversal de área A_2 . À esquerda, parte inferior do tubo está a uma certa altura y_1 de um certo referencial e a parte superior do tubo à direita está a uma altura y_2 desse mesmo referencial.

Vamos considerar o movimento deste fluido que num dado instante ocupa o volume entre os planos 1 e 2 na figura à seguir, e depois de um intervalo de tempo Δt ele passa a ocupar o volume entre os planos 1' e 2'.



O volume entre os planos 1 e 1' é ΔV_1 e o volume entre os planos 2 e 2' é ΔV_2 , onde temos que:

$$\Delta V_1 = (v_1 \Delta t) \cdot A_1$$

$$\Delta V_2 = (v_2 \Delta t) \cdot A_2$$

Considere um intervalo de tempo Δt pequeno, tal que através da superfície A_1 passe uma massa Δm_1 e através da superfície A_2 passa uma massa Δm_2 . Essas massas podem ser escritas como:

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 [(v_1 \Delta t) A_1]$$

e de modo semelhante:

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 [(v_2 \Delta t) A_2]$$

Como a massa que entra pela esquerda deve ser igual à massa que sai à direita, temos que

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

e como o fluido é considerado incompressível, a densidade à esquerda ρ_1 é igual à densidade ρ_2 à direita, logo

$$\rho_1 = \rho_2$$

Desse modo:

$$\Delta m = \Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho = \rho_1 = \rho_2$$

ou seja:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

O trabalho W realizado pelas forças externas sobre o elemento de massa Δm é igual à variação da energia cinética dessa massa quando vai da esquerda para a direita.

Uma das forças externas a esse elemento de massa é a gravidade e a outra força é uma consequência da diferença de pressão externa aplicada nas superfícies A_1 e A_2 .

$$W = W_G + W_P = \Delta K$$

W_G = trabalho realizado pela força da gravidade.

W_P = trabalho realizado como uma consequência da diferença de pressão externa.

$$W_G = \int_1^2 \vec{F}_G \cdot d\vec{l}$$

$$W_P = \int_1^2 \vec{F}_P \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_G \cdot d\vec{l} = (-\hat{j} \Delta m g) \cdot (\hat{j} dy) = -\Delta m g dy$$

$$W_G = \int_1^2 (-\Delta m g dy) = -\Delta m g y \Big|_{y_1}^{y_2} = -\Delta m g (y_2 - y_1)$$

Num intervalo de tempo Δt , um elemento de massa Δm deixou a parte inferior do tubo e passou para a parte superior. Logo, o sistema armazenou energia potencial gravitacional

$$W_G = -\Delta m g (y_2 - y_1)$$

Por outro lado:

$$\vec{F}_P \cdot d\vec{l} = \left\{ (\hat{k} p_1 A_1) + (-\hat{k} p_2 A_2) \right\} \cdot (\hat{k} dz) = (p_1 A_1) dz - (p_2 A_2) dz$$

$$W_P = p_1 A_1 \int_1^2 dz - p_2 A_2 \int_1^2 dz = p_1 A_1 \Delta z_1 - p_2 A_2 \Delta z_2 = p_1 A_1 (v_1 \Delta t) - p_2 A_2 (v_2 \Delta t)$$

Mas

$$A(v \Delta t) = \Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}$$

logo

$$W_p = \frac{\Delta m}{\rho} (p_1 - p_2)$$

A variação da energia cinética é dada por:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

Podemos então dizer que:

$$\frac{\Delta m}{\rho} (p_1 - p_2) - \Delta m g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

ou ainda:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} - g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

ou seja:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

de onde podemos concluir que:

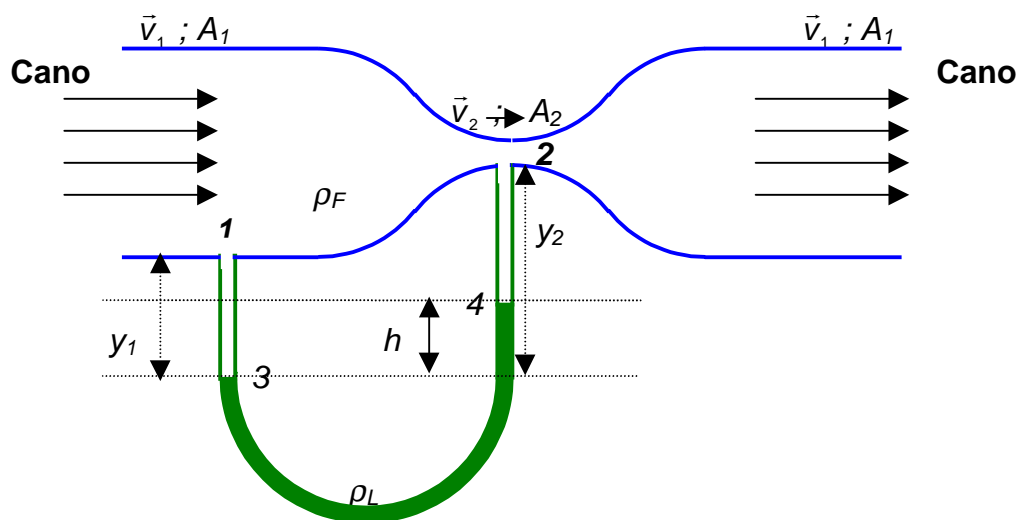
$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

que é a equação de Bernoulli.

O medidor de Venturi

O medidor de Venturi é um aparelho usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido de densidade ρ_F em um cano. O medidor é conectado entre duas seções do cano como mostrado na figura à seguir.

A área A da seção transversal da entrada e da saída são iguais a área da seção transversal do cano. Entre a entrada e a saída, o fluido passa por uma região estreita de área a . Um manômetro que contém um líquido de densidade ρ_L conecta a parte mais larga à parte mais estreita, onde a velocidade do fluido tem um valor V , que é maior que a velocidade v na entrada do medidor.



Vamos usar a equação de Bernoulli para analisar a variação das grandezas envolvidas.

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Aplicando essa equação para esse cano, nas regiões 1 e 2, encontramos que:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 + \rho_F g (y_1 - h) = p_2 + \frac{1}{2} \rho_F v_2^2 + \rho_F g (y_2 - h)$$

onde estamos tomando como referencial da energia potencial gravitacional o ponto mais alto do líquido dentro do manômetro, e desse modo podemos usar a Equação de Bernoulli apenas para o fluido do cano. Esta equação pode tomar a forma:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 + \rho_F g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_F v_2^2 + \rho_F g y_2$$

$$(p_1 + \rho_F g y_1) - (p_2 + \rho_F g y_2) = \frac{1}{2} \rho_F v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_F v_1^2$$

No interior do manômetro, as pressões se equacionam do seguinte modo:

$$\begin{cases} p_3 = p_1 + \rho_F g y_1 \\ p_4 = p_2 + \rho_F g (y_2 - h) \\ p_3 = p_4 + \rho_L g h \end{cases}$$

Usando as duas primeiras equações na última, encontramos que:

$$(p_1 + \rho_F g y_1) = [p_2 + \rho_F g (y_2 - h)] + \rho_L g h$$

ou seja:

$$(p_1 + \rho_F g y_1) - (p_2 + \rho_F g y_2) = \rho_L g h - \rho_F g h = (\rho_L - \rho_F) g h$$

Identificando esta equação com a aplicação da equação de Bernoulli, encontramos que:

$$\frac{1}{2} \rho_F v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 = (\rho_L - \rho_F) g h$$

ou seja:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(\rho_L - \rho_F) g h}{\rho_F}$$

À partir da equação da continuidade, encontramos que:

$$\rho_L v_1 A_1 = \rho_L v_2 A_2$$

ou seja:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

e desse modo

$$v_2^2 - v_1^2 = v_1^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} \right) = \frac{2(\rho_L - \rho_F) g h}{\rho_F}$$

e finalmente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2A_2^2 (\rho_L - \rho_F) g h}{(A_1^2 - A_2^2) \rho_F}}$$

e portanto podemos medir a velocidade v_1 do fluido ao entrar no cano.

Solução de alguns problemas

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

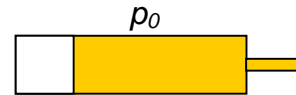
01 Encontre o aumento de pressão de um fluido em uma seringa quando uma enfermeira aplica uma força de $42N$ ao êmbolo da seringa, de raio $1,1cm$.

$$F = 42N$$

$$r = 1,1cm = 0,011m$$

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = 110.487,7N/m^2$$

$$1N/m^2 = 1 \text{ Pascal}$$



$$1atm = 1,013 \times 10^5 Pa$$

logo

$$\Delta p = 1,08atm$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

05 Um peixe controla a sua profundidade na água através do ajuste do conteúdo de ar de um osso poroso ou em um saco de ar para que a sua densidade fique igual à da água. Suponha que, com as bolsas de ar vazias, um peixe tenha a densidade de $1,08g/cm^3$. Se ele quiser reduzir a sua densidade à da água, que fração do volume do seu corpo deverá ser ocupada por ar dentro dos sacos? (Estes sacos são chamados bexigas natatórias.

$$\rho_I = 1,08g/cm^3$$

$$\rho_F = 1g/cm^3$$

A densidade do peixe varia de ρ_I até ρ_F :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_I = \frac{M_P}{V_I} \\ \rho_F = \frac{M_P + M_{AR}}{V_F} \cong \frac{M_P}{V_F} \end{array} \right.$$

Na definição de ρ_F levamos em consideração que a massa de ar é muito menor que a massa do peixe.

A razão entre os volumes tem a forma:

$$\frac{V_F}{V_I} = \frac{\frac{M_P}{\rho_F}}{\frac{M_P}{\rho_I}} = \frac{\rho_I}{\rho_F}$$

Mas

$$V_F = V_I + V_{AR}$$

logo:

$$\frac{V_I + V_{AR}}{V_I} = \frac{V_F}{V_I} = \frac{\rho_I}{\rho_F} = 1 + \frac{V_{AR}}{V_I} \Rightarrow \frac{V_{AR}}{V_I} = \frac{\rho_I}{\rho_F} - 1$$

$$\frac{V_{AR}}{V_I} = 0,08$$

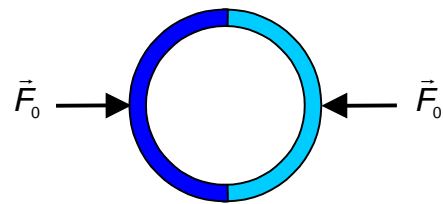
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

07

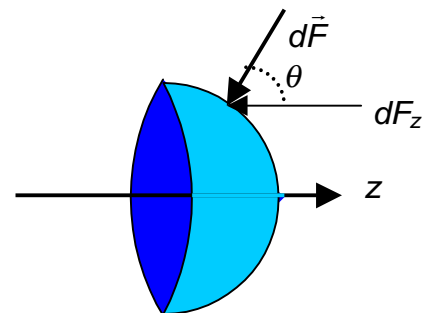
Em 1654, Otto von Guericke, burgomestre de Magdeburg e inventor da bomba de ar, deu uma demonstração diante da Dieta Imperial em que dois grupos de oito cavalos não foram capazes de separar dois hemisférios de latão unidos, dentro dos quais se fez vácuo.

- a) Pressupondo que os dois hemisférios tenham paredes finas, de forma que R , na figura à seguir, possa ser considerado o raio interno e externo, mostre que a força F necessária para separar os hemisférios é $F = \pi R^2 \Delta p$ onde Δp é a diferença entre as pressões interna e externa na esfera.

A atmosfera exerce uma pressão (e consequentemente um força) em todos os pontos dos dois hemisférios, mas apenas a componente z dessa força "empurra" um hemisfério contra o outro. As componentes x e y dessa força são nulas.



Isso pode ser percebido se observarmos que para cada elemento de força $d\vec{F}$ existe atuando um outro elemento $d\vec{F}'$ simétrico em relação ao eixo z . As componentes x e y de $d\vec{F}'$ anularão as componentes equivalentes de $d\vec{F}$. No entanto, somar-se-ão as componentes z dessas forças elementares simétricas.

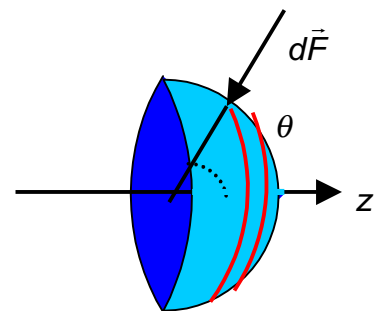


$d\vec{F}$ é um vetor radial, ou seja:

$$d\vec{F} = -\hat{r} dF$$

As suas componentes cartesianas são:

$$dF_x = -dF \text{ sen}\theta \text{ cos}\varphi$$



$$dF_Y = - dF \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$dF_Z = - dF \cos\theta$$

Considerando que:

$$dF = p_0 dA = p_0 (R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi)$$

teremos que:

$$dF_X = - p_0 R^2 (\operatorname{sen}^2\theta d\theta) (\cos\varphi d\varphi)$$

$$dF_Y = - p_0 R^2 (\operatorname{sen}^2\theta d\theta) (\operatorname{sen}\varphi d\varphi)$$

$$dF_Z = - p_0 R^2 (\operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta) (d\varphi)$$

Integrando, teremos:

$$F_X = \int dF_X = -p_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi$$

$$F_Y = \int dF_Y = -p_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi d\varphi$$

$$F_Z = \int dF_Z = -p_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Mas por outro lado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = \operatorname{sen}\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi d\varphi = -\cos\varphi \Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0 \\ \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \end{array} \right.$$

logo:

$$F_X = F_Y = 0$$

e

$$F_Z = 2\pi R^2 p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{sen}\theta$, encontramos que

$$F_Z = 2\pi R^2 p_0 \int_0^1 u du = 2\pi R^2 p_0 \frac{1}{2}$$

Como F_Z é a força resultante externa, vamos chamá-la de F_0 , ou seja:

$$F_0 = \pi R^2 p_0$$

A força líquida F é a diferença entre as forças internas e externas:

$$F = F_0 - F_1 = \pi R^2 (p_0 - p_1) = \pi R^2 \Delta p$$

- b) Fazendo $R = 30\text{cm}$ e a pressão interna igual a $0,10\text{atm}$, encontre a força que os cavalos teriam de exercer para separar os hemisférios.

$$R = 30\text{cm} = 0,30\text{m}$$

$$p_0 = 1\text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pascal}$$

$$p_1 = 0,1\text{atm} = 1,013 \times 10^4 \text{ Pascal}$$

$$\Delta p = p_0 - p_1 = 0,9\text{atm} = 91.170\text{Pa}$$

$$F = 25.777,7 \text{ Newtons}$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

11 Uma piscina tem as dimensões $24\text{m} \times 9\text{m} \times 2,5\text{m}$.

- a) Quando ela está cheia de água, qual é força (devido somente à água) sobre o fundo, nas extremidades e nos lados?

$$H = 2,5\text{m}$$

$$L = 9\text{m}$$

$$C = 24\text{m}$$

A pressão no fundo da piscina é dada por:

$$P = \rho g H$$

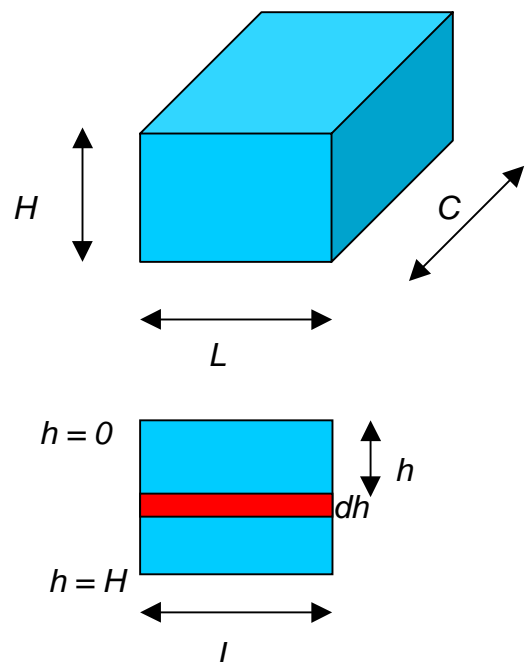
Logo, a força total no fundo será:

$$F = P A = (\rho g H) (L C)$$

$$F = \rho g V$$

$$F = (10^3 \text{ kg/m}^3)(10\text{m/s}^2)(2,5 \cdot 9 \cdot 24 \text{ m}^3)$$

$$F = 5,4 \times 10^6 \text{ N}$$



A pressão a uma profundidade genérica h é dada por:

$$P = \rho g h$$

A força lateral em uma superfície dA ao longo desta profundidade e associada a essa pressão tem a forma:

$$dF_L = P dA = P (L dh) = \rho g L h dh$$

e portanto, a força lateral é dada por:

$$F_L = \int_0^H \rho g L h dh = \frac{\rho g L H^2}{2}$$

$$F_L = 2,8 \times 10^5 \text{ N}$$

Como temos duas superfícies laterais iguais:

$$2 F_L = 5,6 \times 10^5 \text{ N}$$

A força ao longo do comprimento é dada por:

$$F_C = \int_0^H \rho g C h dh = \frac{\rho g C H^2}{2}$$

$$F_C = 7,4 \times 10^5 \text{ N}$$

Como temos duas superfícies laterais iguais:

$$2 F_C = 1,4 \times 10^6 \text{ N}$$

- b) Se você estiver preocupado com o fato das paredes e pisos de concreto se quebrarem, seria apropriado levar em conta a pressão atmosférica? Porque?

Sim, por causa do princípio de Pascal. A pressão que a atmosfera exerce na superfície se transmite para todos os pontos da água, inclusive os lados e o fundo.

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

12

- a) Encontre o peso total da água em cima de um submarino nuclear, a uma profundidade de 200m , supondo que o seu casco (corte da seção transversal) tenha a área de 3000m^2 .

$$A = 3000\text{m}^2$$

$$h = 200\text{m}$$

$$\rho_s = 1,03\text{g/cm}^3 = \text{densidade da água do mar}$$

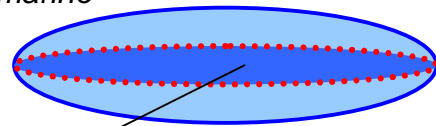
$$p = \rho_s g h$$

$$F = p A = \rho_s g h A$$

$$F = (1,03 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(10\text{m/s}^2)(200\text{m})(3000\text{m}^2)$$

$$F = 6,16 \times 10^9 \text{ N}$$

Submarino



A = Seção transversal do submarino

- b) A que pressão da água um mergulhador estaria submetido a essa profundidade? Você acha que os ocupantes de um submarino danificado, a essa profundidade poderiam escapar sem equipamento especial? Considere a densidade da água do mar $1,03\text{g/cm}^3$.

$$p = p_0 + \rho_S g h$$

$$p = (1,01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(200 \text{ m})$$

$$p = (1,01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (2,06 \times 10^6 \text{ Pa})$$

$$p = 2,1 \times 10^6 \text{ N} = 2,08 \text{ atm}$$

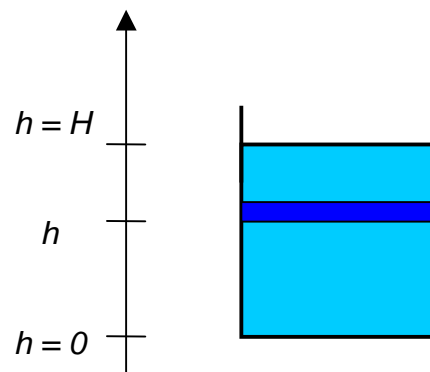
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 15 Dois vasos cilíndricos idênticos, com suas bases ao mesmo nível contém um líquido de densidade ρ . A área da base é A para ambos, mas em um dos vasos a altura do líquido é h_1 e no outro é h_2 . Encontre o trabalho realizado pela força gravitacional ao igualar os níveis, quando os dois vasos são conectados.

Seja $U(H)$ a energia potencial gravitacional armazenada num recipiente de área transversal A e altura H .

A faixa de líquido a uma altura h , com uma espessura dh , tem uma energia potencial gravitacional dada por:

$$dU = dm g h = (\rho dV) g h = (\rho A dh) g h$$



ou seja:

$$dU = \rho A g h dh$$

e portanto:

$$U(H) = \rho A g \int_0^H h dh = \rho g A \frac{H^2}{2}$$

Considerando a situação inicial, quando temos dois vasos que se comunicam, a energia potencial gravitacional inicial do conjunto será:

$$U_i = U(h_1) + U(h_2) = \rho A g \frac{h_1^2}{2} + \rho A g \frac{h_2^2}{2}$$

Ou seja:

$$U_i = \frac{\rho A g}{2} (h_1^2 + h_2^2)$$

Depois que os vasos são conectados, os seus níveis alcançam uma altura h de equilíbrio. Como não existem perdas, a soma dos volumes dos líquidos dos dois tanques permanece constante, logo:

$$h_1 A + h_2 A = 2 h A$$

ou seja:

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

A energia potencial gravitacional final do conjunto será:

$$U_F = U(h) + U(h) = 2 U(h)$$

ou seja:

$$U_F = 2 \left[\frac{\rho A g h^2}{2} \right] = 2 \left[\frac{\rho A g}{2} \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2 \right] = \rho A g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2$$

$$\Delta U = U_F - U_i = \frac{\rho A g}{4} [(h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 h_2) - 2(h_1^2 + h_2^2)]$$

$$\Delta U = \frac{\rho A g}{4} \{-h_1^2 - h_2^2 + 2h_1 h_2\}$$

$$\Delta U = -\frac{\rho A g}{4} (h_2 - h_1)^2$$

Mas

$$W = -\Delta U = \frac{\rho A g}{4} (h_2 - h_1)^2$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

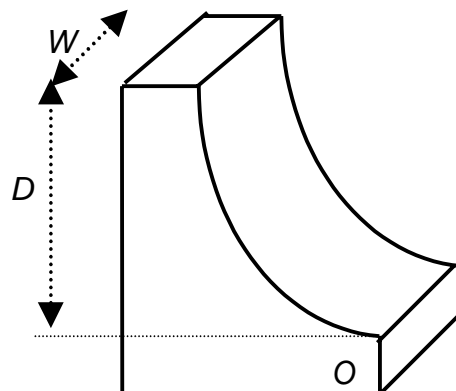
19 A água se encontra a uma profundidade D abaixo da face vertical de um dique, com ilustra a figura à seguir.

- a) Encontre a força horizontal resultante exercida no dique pela pressão manométrica da água.

Vamos considerar a força elementar dA exerci sobre o dique por uma lâmina de líquido represado. Essa lâmina está a uma profundidade h e nessa profundidade existe uma pressão p exercida pelo líquido . Desse modo:

$$dF = p dA = p W dh$$

onde W é a largura do dique e dh é a espessura da lâmina.



Mas

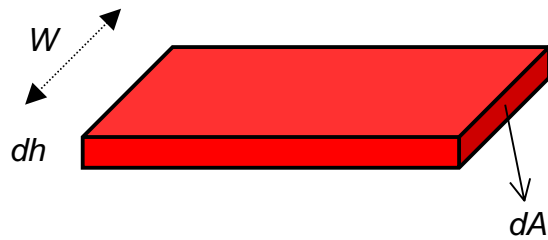
$$p = \rho g h$$

logo

$$dF = \rho g W h dh$$

e a força resultante terá a forma:

$$F = \rho g W \int_0^D h dh = \frac{\rho g W D^2}{2}$$



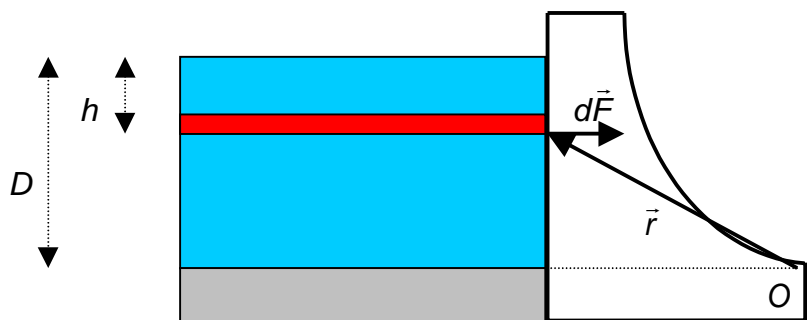
- b) Encontre o torque resultante devido à pressão manométrica da água, em relação ao ponto O .

O torque que a lâmina exerce no dique, em relação ao ponto O é dado por:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

ou seja:

$$d\tau = (D - h) dF$$



ou ainda:

$$d\tau = (D - h) \{ \rho g W h dh \} = \rho g W (D - h) dh$$

e integrando, temos

$$\tau = \rho g W \int_0^D (D - h) h dh = \rho g W \left\{ D \int_0^D h dh - \int_0^D h^2 dh \right\}$$

$$\tau = \rho g W \left\{ D \frac{D^2}{2} - \frac{D^3}{3} \right\} = \frac{\rho g W D^3}{6}$$

- c) Encontre o braço de alavanca, em relação ao ponto O , da força horizontal resultante sobre o dique.

$$\tau = F \bar{L} \Rightarrow \frac{\rho g W D^3}{6} = \left(\rho g W \frac{D^2}{2} \right) \bar{L}$$

ou seja:

$$\bar{L} = \frac{D}{3}$$

onde \bar{L} é medido à partir do fundo do dique.

22 Um pistom de área menor a é usado em uma prensa hidráulica para exercer uma pequena força f num líquido confinado. Um tubo o conecta com um outro pistom maior de área A .

a) Que força F o pistom maior sustentará?

Usando o princípio de Pascal, a força aplicada f produz no líquido uma variação de pressão dada por:

$$\Delta p = \frac{f}{a} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \left(\frac{A}{a}\right)f$$

Se o pistom da menor se mover de d , o pistom maior mover-se-á de D , mas os volumes associados a esses movimentos serão os mesmos. Ou seja:

$$V = ad = AD \Rightarrow D = \left(\frac{a}{A}\right)d$$

O trabalho W_f executado pela força f será:

$$W_f = fd = \left(F \frac{a}{A}\right) \left(D \frac{A}{a}\right) = FD = W_F$$

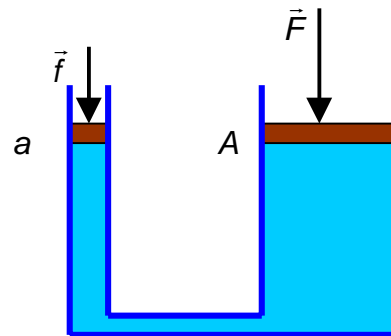
e portanto as duas forças fazem o mesmo trabalho.

b) Se o pistom pequeno tem um diâmetro de $l = 3,8\text{cm}$ e o grande de $L = 53\text{cm}$, que peso no pistom pequeno sustentará 2 toneladas no pistom maior?

$$F = f \frac{A}{a} = f \frac{\pi \left(\frac{L}{2}\right)^2}{\pi \left(\frac{l}{2}\right)^2} = f \left(\frac{L}{l}\right)^2$$

Como $F = Mg$ e $f = mg$, temos que:

$$m = M \left(\frac{l}{L}\right)^2 = 10,28\text{kg}$$



26 Um objeto cúbico de dimensão $L = 0,6\text{m}$ de lado e massa $M = 450\text{kg}$ é suspenso por um fio em um tanque aberto com líquido de densidade $\rho = 1030\text{kg/m}^3$.

a) Encontre a força total para baixo, exercida pelo líquido e pela atmosfera sobre o objeto.

$$L = 0,6m$$

$$M = 450kg$$

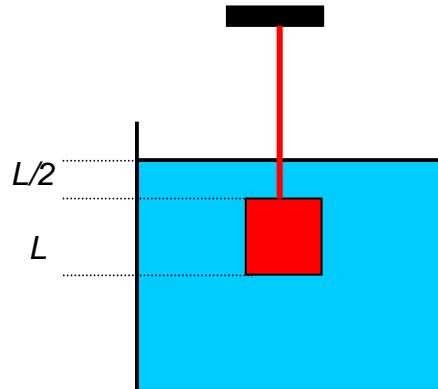
$$\rho = 1030kg/m^3$$

$$p_0 = 1atm = 1,013 \times 10^5 \text{ Pascal}$$

A força total F_S exercida pelo líquido na parte superior do objeto é:

$$F_S = p_s A = \left(p_0 + \rho g \frac{L}{2} \right) L^2$$

$$F_S = 37.580,4N$$



b) Encontre a força total para cima, na base do objeto.

$$F_I = p_I A = \left(p_0 + \rho g \frac{3L}{2} \right) L^2$$

$$F_I = 39.805,2N$$

c) Encontre a tensão no fio.

$$T = P + F_S - F_I$$

$$T = Mg + \left(p_0 + \rho g \frac{L}{2} \right) L^2 - \left(p_0 + \rho g \frac{3L}{2} \right) L^2 = Mg - \rho L^3 g$$

$$T = 450 \cdot 10 - 39.805,2 + 37.580,4 = 4500 - 2.224,8$$

$$T = 2.275,2N$$

d) Calcule o empuxo sobre o objeto, usando o Princípio de Arquimedes.

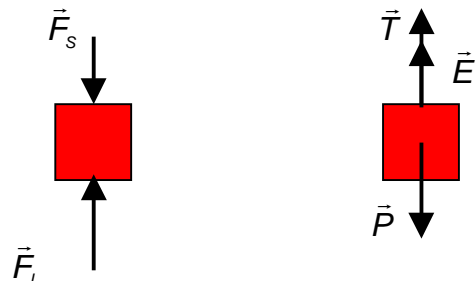
$$E = (\rho V) g = \rho L^3 g = (1030kg/m^3) (0,6m)^3 (10m/s^2)$$

$$E = 2.224,8N$$

e) Qual a relação existente entre todas essas quantidades?

$$E = F_I - F_S$$

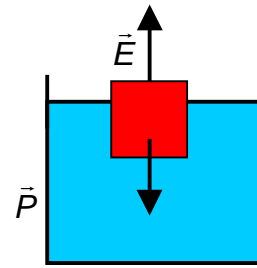
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{E} = 0$$



- a) Encontre a densidade da madeira.

O empuxo é proporcional ao volume do corpo que está submerso, porque é esse volume que desloca o líquido.

Como o corpo está flutuando, esse empuxo é igual ao seu peso. Considerando inicialmente o corpo de madeira flutuando na água:



$$E_A = P_M$$

$$\left(\rho_A \frac{2V}{3}\right)g = (\rho_M V)g \Rightarrow \rho_M = \frac{2}{3}\rho_A$$

Como a densidade da água $\rho_A = 1g/cm^3$, encontramos que:

$$\rho_M = \frac{2}{3}g/cm^3 = 666,7kg/m^3$$

- b) Encontre a densidade do óleo.

$$E_O = P_M$$

$$[\rho_O (0,9V)]g = (\rho_M V)g \Rightarrow \rho_O = \frac{\rho_M}{0,9} = \frac{10}{9}\rho_M = \frac{20}{27}g/cm^3$$

$$\rho_O = 740,7kg/m^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

29 Uma esfera oca, de raio interno igual a $8cm$ e raio externo igual a $9cm$, flutua submersa pela metade em um líquido de densidade $800kg/m^3$.

- a) Qual a massa da esfera?

$$R_I = 8cm = 0,08m$$

$$R_E = 9cm = 0,09m$$

$$\rho_L = 800kg/m^3$$

Quando a esfera flutua, temos que:

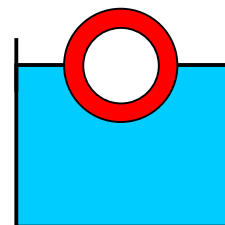
$$P = E$$

ou seja

$$M_E g = \left(\rho_L \frac{V_E}{2}\right)g$$

logo:

$$M_E = \frac{1}{2}\rho_L \frac{4}{3}\pi R_E^3 \Rightarrow M_E = 1,22kg$$



b) Calcule a densidade do material de que ele é feita.

$$\rho_E = \frac{M_E}{V} = \frac{M_E}{V_E - V_I} = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi(R_E^3 - R_I^3)}$$

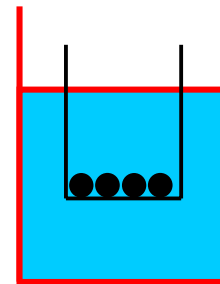
$$\rho_E = 1342,18\text{kg/m}^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

31 Uma lata tem volume de 1200cm^3 e massa de 130g . Quantos gramas de balas de chumbo ela poderia carregar sem que afundasse na água? A densidade do chumbo é $11,4\text{g/cm}^3$.

$$\begin{aligned} V &= 1200\text{cm}^3 \\ M_L &= 130\text{g} \\ \rho_{Pb} &= 11,4\text{g/cm}^3 \\ \rho_A &= 1\text{g/cm}^3 \text{ (densidade da água)} \end{aligned}$$

A lata tem um volume interno V e está flutuando. Que massa M_{Pb} de chumbo pode ser colocada em seu interior? O peso total da lata mais balas de chumbo tem de ser igual ao empuxo exercido pela água na lata. Ou seja:



$$(M_{Pb} + M_L) g = E$$

Usando o Princípio de Arquimedes, o empuxo será igual ao volume do fluido deslocado, logo:

$$E = (\rho_A V) g \Rightarrow (M_{Pb} + M_L) g = (\rho_A V) g$$

ou seja:

$$M_{Pb} = \rho_A V - M_L = 1200\text{g} - 130\text{g}$$

$$M_{Pb} = 1070\text{g}$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

36 Três crianças, cada uma pesando 356N , constroem uma jangada amarrando troncos de diâmetro $0,30\text{m}$ e comprimento $1,80\text{m}$. Quantos troncos serão necessários para que a jangada as sustente? Considere a densidade da madeira como sendo 800kg/m^3 .

$$\begin{aligned} P &= 356\text{N} \\ d &= 0,30\text{m} \\ L &= 1,80\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_M &= 800\text{kg/m}^3 \\ \rho_A &= 1000\text{kg/m}^3 \end{aligned}$$

Seja V_T o volume de cada tronco. Desse modo:

$$V_T = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 L = 0,12 m^3$$

Como a jangada será construída com N troncos, o volume V da jangada será:

$$V = N V_T$$

Para que a jangada flutue com carga máxima, vamos considerar que ela ficará completamente submersa. Neste caso, o empuxo será:

$$E = (\rho_A V) g$$

E a jangada suportará o seu próprio peso mais o peso das crianças:

$$(\rho_A V) g = (\rho_M V) g + 3P$$

ou seja:

$$V = \frac{\rho_M}{\rho_A} V + \frac{3P}{\rho_A g} \Rightarrow V = \frac{3P}{g(\rho_A - \rho_M)}$$

Mas

$$V = N V_T \Rightarrow N = \frac{3P}{V_T g (\rho_A - \rho_M)}$$

$$N = 4,45$$

Será necessário um número de toras maior que quatro. Supondo que a jangada será construída com um número inteiro de toras, serão necessários **cinco troncos** para a construção da jangada.

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

47 Um tanque de grande área é cheio de água a uma profundidade de $0,30m$. Um buraco de área $A = 6,5cm^2$ no fundo do tanque permite que a água escoe.

a) A que taxa a água flui pelo buraco?

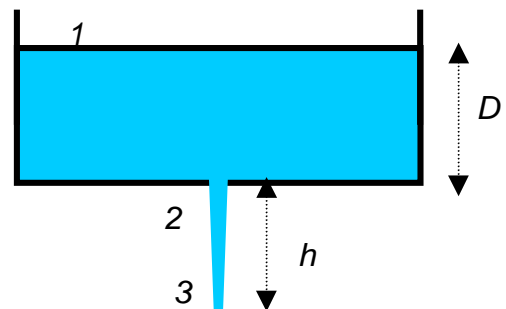
$$D = 0,30m$$

$$A = 6,5cm^2 = 6,5 \times 10^{-4} m^2$$

Vamos usar a Equação de Bernoulli:

$$\rho + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

nos pontos 1 na superfície da água dentro do tanque e o ponto 2 no buraco no fundo do tanque:



$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Considerando que o buraco é pequeno em comparação à superfície da água dentro do tanque, podemos dizer, com boa aproximação, que a velocidade que o nível da água baixa v_1 é desprezível. Ainda considerando que o buraco é pequeno, podemos considerar que o nível D da água varia muito pouco, e desse modo:

$$D = y_1 - y_2$$

portanto:

$$p_1 + \rho g D = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Os pontos 1 e 2 estão em contato com a atmosfera, logo:

$$p_1 = p_2 = p_0$$

logo:

$$\rho g D = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gD} = 2,4\text{m/s}$$

O fluxo de água é definido como

$$\phi = v A$$

ou seja:

$$\phi = A\sqrt{2gD} = 1,58\text{m}^3/\text{s}$$

- b)** A que distância abaixo do fundo do tanque, a área da seção transversal do jato será a metade da área do buraco?

A água vai fluir através do buraco e formar um tubo de corrente. Podemos usar a equação da continuidade para calcular a velocidade quando a seção transversal do tubo de corrente tiver a metade do valor original.

$$v_2 A = v_3 (A/2) \Rightarrow v_3 = 2 v_2 = 4,8\text{m/s}$$

Vamos usar a equação de Torricelli para calcular a altura h , abaixo do fundo do tanque, em que acontece essa relação de áreas; já que a água está em queda livre.

$$h = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g} = 0,86\text{m}$$

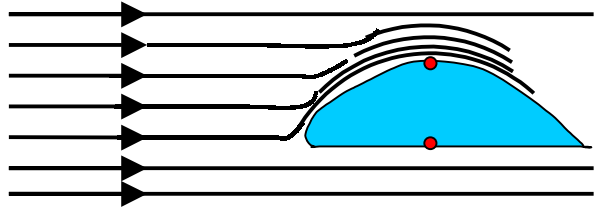
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

48 Sobre a asa de um avião de área A , o ar escoia com velocidade v_C e sob a asa deste mesmo avião (também de área A), a velocidade do ar é v_B . Mostre que nesta situação simplificada, a equação de Bernoulli prediz que a magnitude L da força de sustentação na asa será:

$$L = \frac{1}{2} \rho A (v_C^2 - v_B^2)$$

onde ρ é a densidade do ar.

O fluxo de ar em torno da asa de um avião tem qualitativamente a forma desenhada ao lado. Devido ao seu formato, existe um adensamento das linhas de corrente acima da asa, e portanto a velocidade nesta região é maior que a velocidade abaixo da asa.



Usando a equação de Bernoulli, iremos calcular quais as consequências deste desenho peculiar de uma asa no que diz respeito à força de sustentação de um avião:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Aplicando essa equação para em ponto na parte superior da asa e para um outro ponto na sua parte inferior:

$$p_c + \rho g y_c + \frac{1}{2} \rho v_c^2 = p_b + \rho g y_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2$$

ou seja:

$$\Delta p = p_b - p_c = \frac{1}{2} \rho (v_c^2 - v_b^2) + \rho g (y_c - y_b)$$

Como a diferença de energia potencial gravitacional é desprezível frente a outras diferenças de energia presentes na equação, podemos escrever que:

$$\Delta p = \frac{L}{A} = \frac{1}{2} \rho (v_c^2 - v_b^2) \Rightarrow L = \frac{1}{2} \rho A (v_c^2 - v_b^2)$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

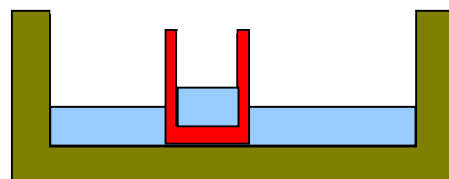
“49”

Coloca-se um bquer de vidro, parcialmente cheio de água, em uma pia, conforme a figura à seguir. Ele tem massa de $390g$ e um volume interno de $500cm^3$. Começa-se, então, a encher a pia com água e verifica-se por experiência que, se o bquer estiver com água até menos da metade, flutuará; mas se a água nele estiver acima da metade, permanecerá no fundo da pia até a água alcançar as suas bordas. Qual a densidade do material de que é feito o bquer?

$$M_B = 390g = 0,39kg$$

$$V_I = 500cm^3 = 0,0005m^3$$

Vamos considerar o caso limite, onde o nível da água da pia atingiu a borda do bquer, que tem metade do volume interno ocupado com água.



O peso do conjunto água + bquer será:

$$P = (M_A + M_B) g = (\rho_A V_I/2 + M_B) g$$

O empuxo será

$$E = (\rho_A V_E) g$$

onde V_E é o volume externo do béquer. Além disso, a densidade do béquer será dada por:

$$\rho_B = \frac{M_B}{V_E - V_I}$$

No caso limite, o empuxo E será igual ao peso P , e portanto teremos:

$$(\rho_A V_E) g = (\rho_A V_I/2 + M_B) g$$

$$V_E = \frac{M_B + \rho_A \frac{V_I}{2}}{\rho_A} = \frac{M_B}{\rho_A} + \frac{V_I}{2}$$

Mas

$$\rho_B = \frac{M_B}{V_E - V_I} \Rightarrow V_E = \frac{M_B}{\rho_B} + V_I$$

ou seja:

$$V_E = \frac{M_B}{\rho_A} + \frac{V_I}{2} = \frac{M_B}{\rho_B} + V_I$$

ou ainda:

$$\frac{M_B}{\rho_A} = \frac{M_B}{\rho_B} + \frac{V_I}{2} \Rightarrow \rho_B = \frac{M_B}{\frac{M_B}{\rho_A} - \frac{V_I}{2}} = 2,79 \text{g/cm}^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
-------------------------------------------------------	--

49	Se a velocidade de escoamento, passando debaixo de uma asa, é 110m/s , que velocidade de escoamento na parte de cima criará uma diferença de pressão de 900Pa entre as superfícies de cima e de baixo? Considere a densidade do ar $\rho = 1,3 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3$
----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$v_B = 110 \text{m/s} = 396 \text{km/h}$$

$$\Delta p = 900 \text{Pa} = 0,00888 \text{atm}$$

$$\rho = 1,3 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3 = 1,3 \text{kg/m}^3$$

$$1 \text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{Pa}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_C^2 - v_B^2) \Rightarrow v_C^2 = v_B^2 + \frac{2 \Delta p}{\rho}$$

$$v_C = 116,1 \text{m/s} = 417,9 \text{km/h}$$

Se cada asa tiver dimensões aproximadas de $A = 0,5m \times 3m = 1,5m^2$, as duas asas corresponderão a uma área de $3m^2$. A força de sustentação, neste caso, será:

$$L = A \Delta p = 2.700N$$

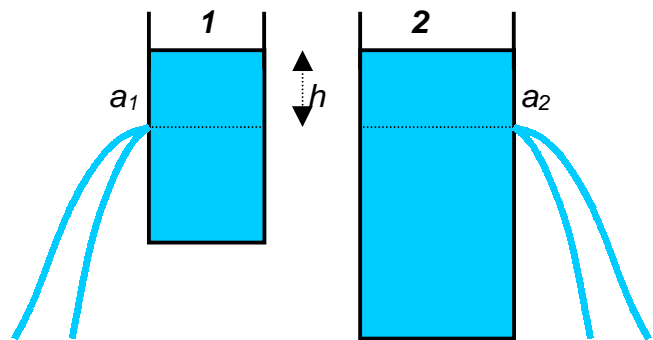
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

50 Suponha que dois tanques, 1 e 2, cada um com uma grande abertura na parte de cima, contenham dois líquidos diferentes. Um pequeno furo é feito nos dois tanques, a uma mesma profundidade h abaixo da superfície do líquido, mas o furo no tanque 1 tem a metade da área de seção transversal do furo no tanque 2.

a) Qual a razão ρ_1 / ρ_2 das densidades dos fluidos, se for observado que a vazão de massa é a mesma nos dois furos?

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ \Delta m &= \rho \Delta V \\ \Delta m_1 &= \rho A \Delta y_1 \\ \Delta m_2 &= \rho A \Delta y_2 \end{aligned}$$

Δm é a variação de massa no tanque quando o seu volume varia de ΔV e o nível do líquido varia de Δy .



Para um intervalo de tempo Δt temos que

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

e no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho A v_s$$

onde v_s é a velocidade com que o nível da água diminui. Se considerarmos os dois tanques, teremos que:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = \rho_1 A_1 v_{s1} \\ \frac{dm_2}{dt} = \rho_2 A_2 v_{s2} \end{cases}$$

Mas, neste problema, se observa que a vazão de massa é a mesma nos dois furos, logo:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \Rightarrow \rho_1 A_1 v_{s1} = \rho_2 A_2 v_{s2}$$

Quando consideramos que v é a velocidade com que o líquido flui através do orifício de área a , podemos usar a equação da continuidade para concluir que:

$$\rho A v_s = \rho a v$$

Se usarmos esse resultado para cada um dos tanques, encontramos que:

$$\begin{cases} \rho_1 A_1 v_{s1} = \rho_1 a_1 v_1 \\ \rho_2 A_2 v_{s2} = \rho_2 a_2 v_2 \end{cases}$$

usando a igualdade da vazão das massas, temos:

$$\rho_1 a_1 v_1 = \rho_2 a_2 v_2 \quad (1)$$

Aplicando a equação de Bernoulli para o tanque 1, considerando a superfície e um ponto do orifício, temos que:

$$p_{s1} + \frac{1}{2} \rho_1 v_{s1}^2 + \rho_1 g h = p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2$$

e levando em conta que a pressão p_{s1} na superfície é a mesma pressão p_1 em um ponto do orifício, temos que:

$$v_1^2 = v_{s1}^2 + 2gh$$

Como a lâmina do líquido é muito grande, ou seja $A \gg a$, a velocidade v_{s1} que o nível do líquido diminui é muito menos que a velocidade v_1 desse líquido escapando pelo orifício, logo:

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Toda essa argumentação anterior é válida para o tanque 2, e portanto:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Usando as equações (2) e (3) na equação (1), encontramos que:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_2 v_2}{a_1 v_1} \quad \therefore \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_2}{a_2/2} \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$$

b) Qual é a razão entre as vazões dos dois tanques?

$$R = A v = \text{vazão}$$

Logo:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1 v_1}{a_2 v_2} = \frac{1}{2}$$

- c) Até que altura acima do furo se deve adicionar ou retirar líquido do tanque 2, para igualar as vazões?

Vamos considerar que os furos agora estão em profundidades diferentes, logo

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2gH_1} \\ v_2 = \sqrt{2gH_2} \end{cases}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1 v_1}{a_2 v_2} = \frac{a_2/2 \sqrt{2gH_1}}{a_2 \sqrt{2gH_2}} = \sqrt{\frac{H_1}{4H_2}}$$

Quando as vazões forem iguais, teremos:

$$R_1 = R_2 \Rightarrow H_1 = 4H_2$$

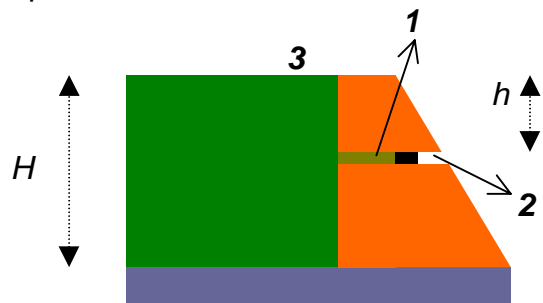
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

53 A profundidade da água doce em repouso atrás de um dique é de $15m$. Um tubo horizontal de $4cm$ de diâmetro passa através do dique $6m$ abaixo da superfície da água, como mostra a figura à seguir. Uma rolha fecha a abertura do tubo.

- a) Encontre a força de atrito entre a rolha e as paredes do tubo.

$$\begin{aligned} H &= 15m \\ h &= 6m \\ d &= 4cm = 0,04m \end{aligned}$$

Seja 1 um ponto no interior do dique e próximo à rolha; e seja 2 um ponto no exterior do dique e próximo à rolha.



Como os pontos não fazem parte de uma mesmo fluido, usando a hidrostática nós temos então que:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h \\ p_2 = p_0 \end{cases} \Rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h$$

Essa é a diferença de pressão que o atrito entre a rolha e as paredes do tubo têm de suportar. Logo a força de atrito será:

$$F = A\Delta p = \rho g h A = 73,89N$$

- b) A rolha é removida. Que volume de água flui através do tubo em $3h$?

Seja dV o elemento de volume que flui através do orifício, em um intervalo de tempo dt . temos então que:

$$dV = (v dt) A$$

Considerando que a velocidade com que o a água fluirá será constante, tendo em vista o volume do dique em comparação com o tamanho do orifício, temos que:

$$V = v t A$$

Vamos relacionar um ponto da superfície da água do dique (3) com um ponto na saída do tubo horizontal (2).

$$p_3 + \rho g y_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Considerando que a área transversal do tubo é muito menor que a lâmina d'água do dique, usando a equação da continuidade, podemos aproximar que a velocidade que o nível da água do dique vai baixar com uma velocidade muito menor que a velocidade do fluxo d'água no tubo. Desse modo, temos que $v_3 \approx 0$

$$p_3 + \rho g y_3 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Considerando que $p_3 = p_2 = p_0$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g (y_3 - y_2) = \rho g h \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

O volume que fluirá será dado por:

$$V = tA\sqrt{2gh} = 147,17m^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

57

Um tubo de Pitot, como esquematizado na figura à seguir, é usado para determinar a velocidade de um avião em relação ao ar. Consiste em um tubo externo com um número de pequenos furos B (são mostrados quatro na figura); o tubo é conectado a um dos braços de um outro tubo em U , cujo segundo braço está conectado a um buraco, A , na parte frontal do aparelho, que se alinha com a direção de vôo do avião. Em A , o ar fica parado, logo $v_A = 0$. Em B , entretanto, a velocidade do ar presumidamente se iguala à velocidade do avião relativa ao ar. Use a equação de Bernoulli para mostrar que

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{AR}}}$$

onde v é a velocidade do avião em relação ao ar e ρ é a densidade do líquido dentro do tubo em U .

Considerando a diferença de pressão entre os dois níveis do líquido dentro do tubo em U , temos que:

$$p_2 = p_1 + \rho g h$$

Mas, usando a equação de Bernoulli, encontramos que:

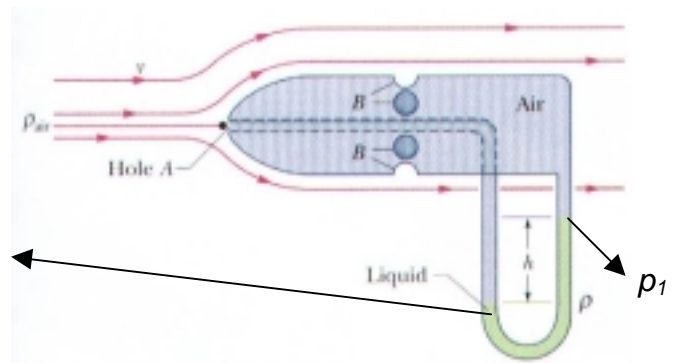
$$p_A + \frac{1}{2} \rho_{AR} v^2 = p_B$$

Se

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A \approx p_1 \\ p_B \approx p_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta p = p_B - p_A = p_2 - p_1$$

ou seja:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_{AR} v^2 = \rho g h \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{AR}}}$$



Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição - Suplemento

68 Um *sifão* é um aparelho usado para remover líquido de um recipiente. Seu funcionamento é mostrado na figura à seguir. O tubo ABC necessita estar inicialmente cheio, mas uma vez que isso tenha sido feito, o líquido fluirá através do tubo até que o nível do líquido no recipiente esteja abaixo da abertura A . O líquido tem densidade ρ e viscosidade desprezível.

a) Com que velocidade o líquido sai do tubo em C ?

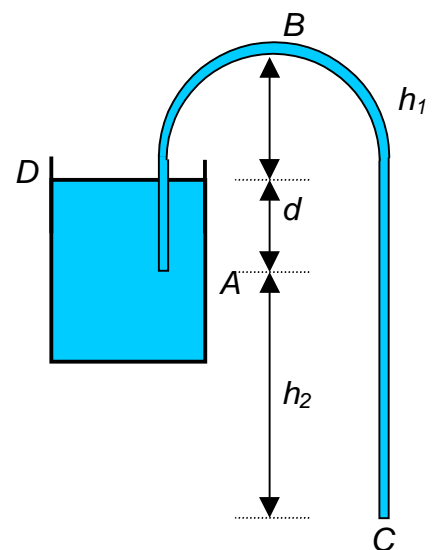
A equação de Bernoulli tem a forma:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Usando essa equação entre um ponto na saída do sifão C e um ponto na superfície do líquido D , temos que:

$$p_D + \rho g(d + h_2) + \frac{1}{2} \rho v_D^2 = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

Supondo que a superfície do líquido tem uma área muito maior que a seção transversal do sifão, podemos considerar que a velocidade com



que a superfície do líquido varia(baixa) é desprezível frente a velocidade com que o líquido entra no sifão. desse modo $v_D \cong 0$, e portanto

$$\frac{1}{2} \rho v_C^2 = p_D - p_C + \rho g (d + h_2)$$

Mas, tanto o ponto C quanto o ponto D estão em contato com a atmosfera em repouso, e portanto estão a uma mesma pressão p_0 , e desse modo $p_D = p_C = p_0$, logo:

$$v_C = \sqrt{2g(d + h_2)}$$

b) Qual a pressão do líquido no ponto mais alto B ?

Usando a equação de Bernoulli para equacionar as grandezas dos pontos B e D , encontramos:

$$p_D + \frac{1}{2} \rho v_D^2 + \rho g(d + h_2) = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g(d + h_1 + h_2)$$

ou seja:

$$p_D = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_1$$

Usando a equação da continuidade entre os pontos B e C , encontramos que:

$$\rho v A = \text{constante} \Rightarrow v_B = v_C = \sqrt{2g(d + h_2)}$$

e portanto:

$$p_B = p_D - \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_D - \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho [2g(d + h_2)]$$

Como $p_D = p_0$, temos que:

$$p_B = p_0 - \rho g (h_1 + h_2 + d)$$

c) Teoricamente, qual a maior altura possível h , que um sifão pode elevar água?

A menor pressão que pode acontecer no ponto B será a pressão nula, logo:

$$p_{MIN} = 0 \Rightarrow p_0 - \rho g [(h_1)_{MAX} + h_2 + d] = 0$$

ou seja:

$$(h_1)_{MAX} = \frac{p_0}{\rho g} - (h_2 + d)$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“73”

As janelas de um prédio de escritórios tem dimensões de $4m \times 5m$. Em um dia tempestuoso, o ar passa pela janela do 53^o andar, paralelo à janela, a uma velocidade de $30m/s$. Calcule a força resultante aplicada na janela. A densidade do ar é $1,23kg/m^3$.

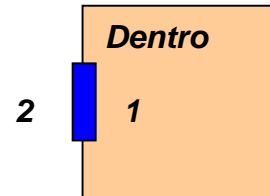
$$v_2 = 30\text{m/s} = 108\text{km/h}$$

Iremos usar a equação de Bernoulli, equacionando um ponto dentro e outro fora do escritório:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

ou seja:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$



Como os pontos estão no mesmo nível $y_1 = y_2$, e como o ar dentro do escritório está parado $v_1 = 0$, temos que:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Mas

$$F = A \Delta p = \frac{1}{2} \rho A v_2^2 = 11.070 \text{Newtons}$$